

CATEGORÍAS TRIANGULADAS Y TEORÍA DE REPRESENTACIONES

1

#2024 - 09 - 30

TAREA La categoría $\mathcal{C}(A)$ de cocomplejos sobre una categoría abeliana A es también abeliana.

Objetivo(s) (I) $\mathcal{C}(A)$ es aditiva, i.e.

(2) los hom-sets son grupos abelianos,

(b) la composición es $\mathbb{Z}$ -bilineal, y

(c) existen productos finitos.

(II) Todo $\mathcal{C}(A)$ -morfismo admite un kernel y un cokernel.

(III) Dado un $\mathcal{C}(A)$ -morfismo f , el morfismo inducido $\bar{f}: \text{coim} f \rightarrow \text{im} f$ es un isomorfismo.

Lema 1. $\mathcal{C}(A)$ es una cat. aditiva, i.e. (2), (b), y (c) se cumplen.

Prueba. (2) Veamos que $\text{Hom}(A^i, B^i)$ es grupo abeliano bajo la operación $f^i + g^i = (f^i + g^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, para todo $f^i = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $g^i = (g^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ morfismos de $A^i \rightarrow B^i$. Claramente, $\text{Hom}(A^i, B^i)$ es cerrado bajo $+$ y es asociativa pues

$$\begin{aligned} (f^i + g^i) + h^i &= (f^i + g^i)_{i \in \mathbb{Z}} + (h^i)_{i \in \mathbb{Z}} \\ &= ((f^i + g^i) + h^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (f^i + (g^i + h^i))_{i \in \mathbb{Z}} \\ &= (f^i)_{i \in \mathbb{Z}} + (g^i + h^i)_{i \in \mathbb{Z}} = f^i + (g^i + h^i) \end{aligned}$$

El morfismo $0 = (0_{A^i B^i})_{i \in \mathbb{Z}}$, $0_{A^i B^i} \in \text{Hom}(A^i, B^i)$, es la identidad del grupo.

$$\begin{aligned} f^i + 0 &= (f^i)_{i \in \mathbb{Z}} + (0_{A^i B^i})_{i \in \mathbb{Z}} = (f^i + 0_{A^i B^i})_{i \in \mathbb{Z}} \\ &= (f^i)_{i \in \mathbb{Z}} = f^i. \text{ Similarmante, } 0 + f^i = f^i \end{aligned}$$

- Además, todo morfismo $f^\bullet \in \text{Hom}(A^\bullet, B^\bullet)$ tiene inversa dada por $-f^\bullet := (-f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. En efecto, $f^\bullet + (-f^\bullet) = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}} + (-f^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (f^i + (-f^i))_{i \in \mathbb{Z}} = (0_{A^i B^i})_{i \in \mathbb{Z}} = 0$.
- Por último, $+$ es conmutativa pues

$$\begin{aligned} f^\bullet + g^\bullet &= (f^i)_{i \in \mathbb{Z}} + (g^i)_{i \in \mathbb{Z}} \\ &= (f^i + g^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (g^i + f^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (g^i)_{i \in \mathbb{Z}} + (f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \\ &= g^\bullet + f^\bullet. \end{aligned}$$

(b) Veamos que la composición es $\mathbb{Z}$ -bilineal, i.e. dados

$f^\bullet, f_1^\bullet, f_2^\bullet \in \text{Hom}(A^\bullet, B^\bullet)$, $g^\bullet, g_1^\bullet, g_2^\bullet \in \text{Hom}(B^\bullet, C^\bullet)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ mostramos

$$(b.1) \quad g^\bullet \circ (\alpha_1 f_1^\bullet + \alpha_2 f_2^\bullet) = \alpha_1 (g^\bullet \circ f_1^\bullet) + \alpha_2 (g^\bullet \circ f_2^\bullet)$$

$$(b.2) \quad (\beta_1 g_1^\bullet + \beta_2 g_2^\bullet) \circ f^\bullet = \beta_1 (g_1^\bullet \circ f^\bullet) + \beta_2 (g_2^\bullet \circ f^\bullet)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} g^\bullet \circ (\alpha_1 f_1^\bullet + \alpha_2 f_2^\bullet) &= (g^i)_{i \in \mathbb{Z}} \circ (\alpha_1 f_1^i + \alpha_2 f_2^i)_{i \in \mathbb{Z}} \\ &= (g^i \circ (\alpha_1 f_1^i + \alpha_2 f_2^i))_{i \in \mathbb{Z}} \\ &\xrightarrow{\text{ya que la composición en } A \text{ es } \mathbb{Z}\text{-bilineal}} = (\alpha_1 (g^i \circ f_1^i) + \alpha_2 (g^i \circ f_2^i))_{i \in \mathbb{Z}} \\ &= \alpha_1 (g^i \circ f_1^i)_{i \in \mathbb{Z}} + \alpha_2 (g^i \circ f_2^i)_{i \in \mathbb{Z}} \\ &= \alpha_1 (g^\bullet \circ f_1^\bullet) + \alpha_2 (g^\bullet \circ f_2^\bullet) \end{aligned}$$

Esto muestra (b.1). De manera totalmente análoga se muestra (b.2).

(c) Basta ver que dos co -complejos $A^\bullet$ y $B^\bullet$ admiten un producto. Para esto:

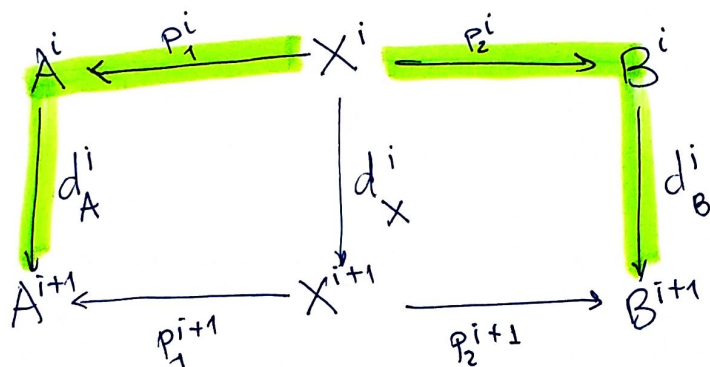
(c.1) Proponemos un candidato $(X^\bullet, p_1^\bullet, p_2^\bullet)$ $\begin{matrix} X^\bullet \rightarrow A^\bullet \\ \downarrow p_1^\bullet \\ X^\bullet \rightarrow B^\bullet \end{matrix}$

(c.2) Mostremos que satisface la P.T. que caract. al producto de $A^\bullet$ y $B^\bullet$.

(c.1) Como A es abeliana, el producto de A^i y B^i existe $\forall i \in \mathbb{Z}$ al que denotamos X^i junto con las proyecciones canónicas $p_1^i: X^i \rightarrow A^i$, $p_2^i: X^i \rightarrow B^i$. Tomemos $P_1^\bullet = (p_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $P_2^\bullet = (p_2^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ donde d_X^i las construimos como sigue:

Para construir el mapa d_X^i que va de X^i a X^{i+1} basta usar la prop. U. del producto $(X^{i+1}, p_1^{i+1}, p_2^{i+1})$ ya que este es un objeto universalmente atractivo.

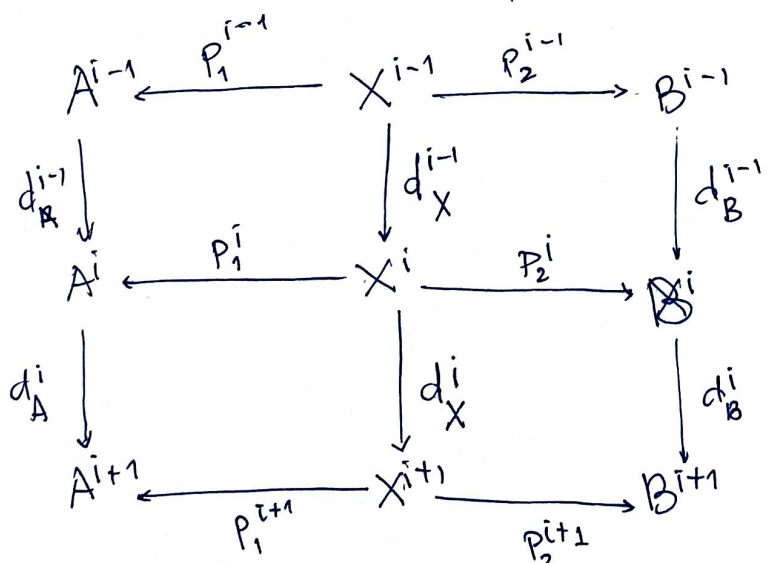
En efecto, al aplicar la P.U. resp. a las flechas exteriores del sig. diagrama obtenemos d_X^i (el cual lo hace conmutar):



Además $d^i \circ d^{i-1} = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. En efecto, con una idea similar a la anterior, obtenemos un único morfismo (en A) α t.q.

$$p_1^{i+1} \circ \alpha = d_A^i \circ d_A^{i-1} \circ p_1^{i-1} \quad \text{y} \quad p_2^{i+1} \circ \alpha = d_B^i \circ d_B^{i-1} \circ p_2^i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Lo que he hecho es aplicar la P.U. de $(X^{i+1}, p_1^{i+1}, p_2^{i+1})$ en el sig. d.:



respecto a X^{i-1} y las flechas $d_A^i \circ d_A^{i-1} \circ p_1^{i-1}$ y $d_B^i \circ d_B^{i-1} \circ p_2^{i-1}$.

Obs: las flechas al interior del diagrama no juegan ningún rol, en el argumento.

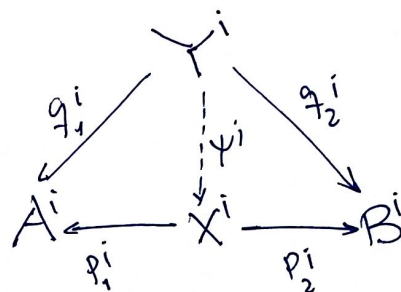
Como este diagrama conmuta, $p_1^{i+1} \circ (d_X^i \circ d_X^{i-1}) = 0$ y $p_2^{i+1} \circ (d_X^i \circ d_X^{i-1}) = 0$, $\forall i$; la unicidad de α implica $d_X^i \circ d_X^{i-1} = \alpha = 0$.

Recordemos que $d_A^i \circ d_A^{i-1} = 0 = d_B^i \circ d_B^{i-1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$. Por tanto α satisface $p_1^{i+1} \circ \alpha = 0$ y $p_2^{i+1} \circ \alpha = 0$. Pero el morfismo cero también satisface esto. La unicidad implica $\alpha = 0$.

En resumen, nuestro candidato a producto de $A^\bullet$ y $B^\bullet$ es $(X^\bullet, p_1^\bullet, p_2^\bullet)$ donde $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $p_1^\bullet = (p_1^i: X^i \rightarrow A^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $p_2^\bullet = (p_2^i: X^i \rightarrow B^i)_{i \in \mathbb{Z}}$.
 Veamos que de hecho, este obj. satisface la P.U.

que caracteriza a un producto de $A^\bullet$ y $B^\bullet$. Es decir, dado $(Y^\bullet, q_1^\bullet, q_2^\bullet)$ con $Y^\bullet = (Y^i, d_Y^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $q_1^\bullet = (q_1^i: Y^i \rightarrow A^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $q_2^\bullet = (q_2^i: Y^i \rightarrow B^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, mostramos que existe un único morfismo de cocomplejos $Y^\bullet \xrightarrow{\psi^\bullet} X^\bullet$ t.q. $q_1^\bullet = p_1^\bullet \circ \psi^\bullet$, $q_2^\bullet = p_2^\bullet \circ \psi^\bullet$.

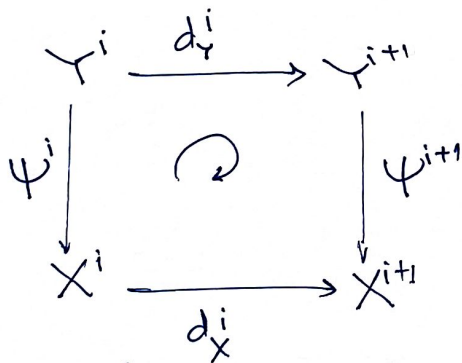
Esto es sencillo pues basta notar que, por cada $i \in \mathbb{Z}$, la P.U. de (X^i, p_1^i, p_2^i) implica la existencia de un único morfismo $\psi^i: Y^i \rightarrow X^i$ que hace conmutar el diagrama



para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Entonces tomamos $\psi^\bullet = (\psi^i)_{i \in \mathbb{Z}}$

Sin embargo, debemos comprobar que $\psi^\bullet$ es un morfismo de cocomp., i.e. que el sig. diag. conmuta $\forall i \in \mathbb{Z}$:

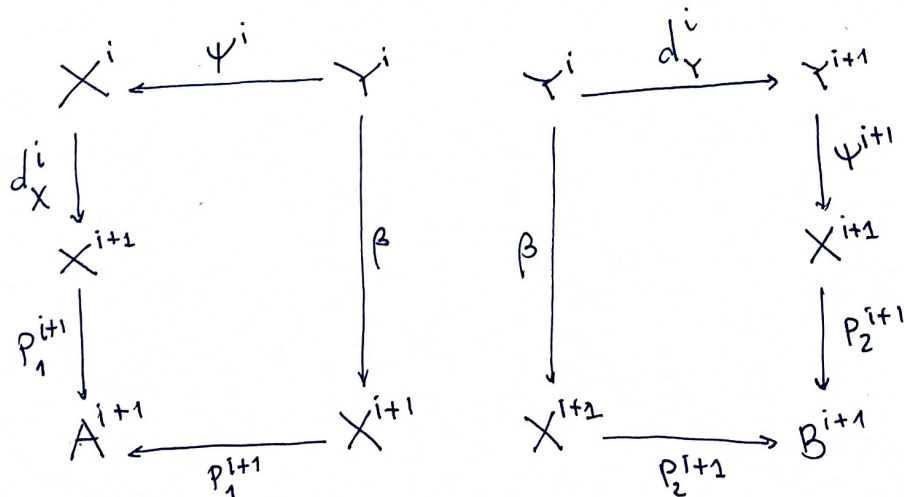


La estrategia es expandir este diagrama incorporando las proy.

$$A^{i+1} \xleftarrow{p_1^{i+1}} X^{i+1} \xrightarrow{p_2^{i+1}} B^{i+1}$$

y usar (de nuevo) la P.U. del prod. $(X^\bullet)$

Por la P.U. de $(X^{i+1}, p_1^{i+1}, p_2^{i+1})$, existe un único morfismo β que hace conmutar cada uno de los sig. diag:



Para que el diagrama izquierdo conmute, $\beta = d_X^i \circ \psi^i$.

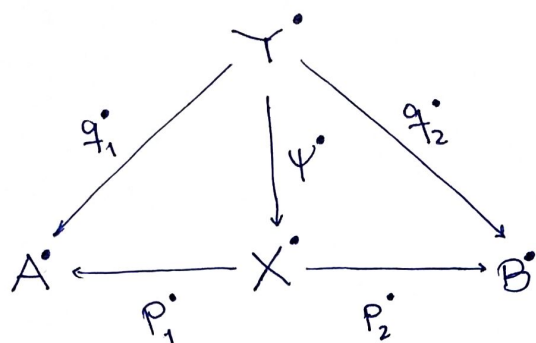
Para que el derecho conmute, $\beta = \psi^{i+1} \circ d_Y^i$.

Luego $d_X^i \circ \psi^i = \psi^{i+1} \circ d_Y^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, $\psi^\bullet$ es un morf. de cocomplejos.

Ahora, es claro que ψ^* hace conmutar el sq. diagrama

5



Nota que

$$p_1^* \circ \psi^* = (p_1^i \circ \psi^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (q_1^i)_{i \in \mathbb{Z}} = q_1^*$$

y

$$p_2^* \circ \psi^* = (p_2^i \circ \psi^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (q_2^i)_{i \in \mathbb{Z}} = q_2^*$$

Además ψ^* es el único morfismo $Y^* \rightarrow X^*$ con esta propiedad.

Si $\varphi^*: Y^* \rightarrow X^*$ fuese otro morfismo tal que $p_1^* \circ \varphi^* = q_1^*$ y $p_2^* \circ \varphi^* = q_2^*$, entonces $p_1^i \circ \varphi^i = p_1^i \circ \psi^i$ y $p_2^i \circ \varphi^i = p_2^i \circ \psi^i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$ pero la unicidad de ψ^i , por cada $i \in \mathbb{Z}$, implica $\varphi^i = \psi^i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$. Luego $\varphi^* = \psi^*$.

En resumen: El producto de A^* y B^* existe y es (X^*, p_1^*, p_2^*) .

Esto concluye la demostración de que $\mathcal{C}(A)$ es ~~abeliano~~ aditivo $\square$

Lema 2. Sea $f^*: A^* \rightarrow B^*$ un morfismo en $\mathcal{C}(A)$.

Entonces f^* tiene un kernel y un cokernel.

Prueba. Denotemos $f^* = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Cada $f^i: A^i \rightarrow B^i$ es un morfismo en A , así que tiene un kernel $(\text{Ker } f^i, \text{ker } f^i)$.

Afirmamos que el kernel de f^* es $(\text{Ker } f^i, \text{ker } f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ junto con $(d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ donde $d^i: \text{Ker } f^i \rightarrow \text{Ker } f^{i+1}$ se construye como sigue:

Dado que $f^i \circ d_A^{i-1} \circ \text{ker } f^{i-1} = d_B^{i-1} \circ f^{i-1} \circ \text{ker } f^{i-1} = d_B^{i-1} \circ 0 = 0$, existe un único morfismo $d^i: \text{Ker } f^{i-1} \rightarrow \text{Ker } f^i$ t.q. e. s. d. c.:

$$\text{Ker } f^i \xrightarrow{\text{ker } f^i} A^i \xrightarrow{f^i} B^i$$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \\ d^{i-1} \uparrow & & \\ \text{Ker } f^{i-1} & \xrightarrow{d_A^{i-1} \circ \text{ker } f^{i-1}} & A^i \end{array}$$

* Tomemos $d^* = (d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y verifiquemos que $d^{i+1} \circ d^i = 0$.

Como kernels son mónicos, basta ver que $\ker f^{i+2} \circ (d^{i+1} \circ d^i) = 0$. 6

$$\text{Notemos } \ker f^{i+2} \circ d^{i+1} \circ d^i = d_A^{i+1} \circ \ker f^{i+1} \circ d^i$$

$$= d_A^{i+1} \circ d_A^i \circ \ker f^i = 0 \circ \ker f^i = 0.$$

Por lo tanto, nuestro candidato a kernel de $f^\bullet$ es

$$\left((\ker f^i, \ker f^i), d^i \right)_{i \in \mathbb{Z}}$$

Obs: En realidad, me refiero al cocomplejo $(\ker f^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Resta ver que este objeto satisface la prop. U. de un kernel.

Sea $(K^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}} = K^\bullet$ otro complejo ~~con la prop. que~~ y $\gamma^\bullet: K^\bullet \rightarrow A^\bullet$ un morf. de cocomplejos tal que $f^\bullet \circ \gamma^\bullet = 0$, i.e. $(f^i \circ \gamma^i)_{i \in \mathbb{Z}} = 0$

La p.U. del kernel de f^i implica que existe un único morfismo en A , $\theta^i: K^i \rightarrow \ker f^i$, tal que $\gamma^i = \ker f^i \circ \theta^i$.

$$\begin{array}{ccccc} \ker f^i & \xrightarrow{\ker f^i} & A^i & \xrightarrow{f^i} & B^i \\ \uparrow \theta^i & \searrow \gamma^i & & & \\ K^i & & & & \end{array}$$

Se sigue que $\gamma^\bullet = (\ker f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \circ \theta^\bullet$. En consecuencia, el kernel de $f^\bullet$ es

$$(\ker f^\bullet, \ker f^\bullet) = \left((\ker f^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}, (\ker f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \right).$$

La demostración de que $f^\bullet$ tiene un cokernel es completamente análoga, y por tanto se omite.

[3]

Obs: He olvidado verificar que $\theta^\bullet = (\theta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de $\mathcal{C}(A)$

Incluyo la prueba al reverso de la hoja.

Demostración de que $\Theta^\bullet$ es un morfismo de complejos

i.e. que
este diagrama
conmuta

$$\begin{array}{ccc} K^i & \xrightarrow{\partial^i} & K^{i+1} \\ \Theta^i \downarrow & & \downarrow \Theta^{i+1} \\ \text{Ker } f^i & \xrightarrow{d^i} & \text{Ker } f^{i+1} \end{array}$$

Es suficiente:

$$\text{Ker } f^{i+1} \circ d^i \circ \Theta^i = \text{Ker } f^{i+1} \circ \Theta^{i+1} \circ \partial^i$$

Conocemos que el sq. diag. conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} K^i & \xrightarrow{\Theta^i} & \text{Ker } f^i & \xrightarrow{d^i} & \text{Ker } f^{i+1} & \xleftarrow{\Theta^{i+1}} & K^{i+1} \\ \parallel & & \downarrow \text{ker } f^i & & \downarrow \text{ker } f^{i+1} & & \parallel \\ K^i & \xrightarrow{\gamma^i} & A^i & \xrightarrow{d_A^i} & A^{i+1} & \xleftarrow{\gamma^{i+1}} & K^{i+1} \\ \parallel & & \uparrow \gamma^i & & \uparrow \gamma^{i+1} & & \parallel \\ K^i & \xlongequal{\quad} & K^i & \xrightarrow{\partial^i} & K^{i+1} & \xlongequal{\quad} & K^{i+1} \end{array}$$

Luego

$$\text{Ker } f^{i+1} \circ \Theta^{i+1} \circ \partial^i = \gamma^{i+1} \circ \partial^i$$

$$= d_A^i \circ \gamma^i \quad (\gamma: K^\bullet \rightarrow A^\bullet \text{ es morf. de cocomplejos})$$

$$= d_A^i \circ \text{ker } f^i \circ \Theta^i$$

$$= \text{ker } f^{i+1} \circ d^i \circ \Theta^i$$

como deseábamos.

Lema 3. Sea $f^* : A^* \rightarrow B^*$ un $\mathcal{C}(A)$ -morfismo.

El morfismo inducido $\overline{f^*} : \text{Coim } f^* \rightarrow \text{Im } f^*$ es un isomorfismo.

Prueba. Denotemos $f^* = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. La estrategia es usar el hecho de que cada mapa inducido $\overline{f^i}$ es un isomorfismo.

Vemos primero que $\overline{f^*} = (\overline{f^i})_{i \in \mathbb{Z}}$. Tenemos $f^* = q^* \circ \overline{f^*} \circ p^*$ donde $p^* = (\text{coim } f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $q^* = (\text{im } f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Note que tanto p^* como q^* son morf. de cocomplejos pues se obtienen a partir de los P.U's que definen el kernel del cokernel de f^* y viceversa.

Entonces $f^* = q^* \circ \overline{f^*} \circ p^*$ implica $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (\text{im } f^i \circ g^i \circ \text{coim } f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$

donde $\overline{f^*} = (g^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. La unicidad de la factorización canónica de f^* implica que $g^i = \overline{f^i} \ \forall i \in \mathbb{Z}$. Esto establece nuestra afirmación.

Como cada $\overline{f^i}$ es un isomorfismo, toda $\overline{f^i}$ tiene una inversa h^i . Notemos que $h^* = (h^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de cocomplejos.

En efecto, pues el sig. diag. conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Coim } f^i & \xrightarrow{\delta^i} & \text{Coim } f^{i+1} \\ \overline{f^i} \downarrow & & \downarrow \overline{f^{i+1}} \\ \text{Im } f^i & \xrightarrow{\partial^i} & \text{Im } f^{i+1} \end{array}$$

Luego $\partial^i \circ \overline{f^i} = \overline{f^{i+1}} \circ \delta^i$

$\Rightarrow \partial^i = \overline{f^{i+1}} \circ \delta^i \circ h^i$

$\Rightarrow h^{i+1} \circ \partial^i = \delta^i \circ h^i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

Por último, es claro que $\overline{f^*} \circ h^* = 1_{\text{Im } f^*}$ y $h^* \circ \overline{f^*} = 1_{\text{Coim } f^*}$ lo que significa que $\overline{f^*}$ es un isomorfismo.

Fin de la prueba. $\square$