CATEGORÍAS TRIANGULADAS Y TEORÍA DE REPRESENTACIONES

#2024-09-30

TAREA La categoría $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de cocomplejos sobre una categoría abeliana $\mathcal{A}$ es también abeliana.

Objetivo(s) (I) $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ es aditiva, i.e.

(a) los hom-sets son grupos abelianos,

(b). la composición es $\mathbb{Z}$-bilineal, y

(c) existen productos finitos.

(II) Todo $\mathcal{C}(\mathcal{A})$-morfismo admite un kernel y un cokernel.

(III) Dado un $\mathcal{C}(\mathcal{A})$-morfismo f, el morfismo inducido $\bar{f}$: $\operatorname{Coim} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$ es un isomorfismo.

Lema 1. $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ es una cat. aditiva, i.e. (a), (b), y (c) se cumplen.

Prueba. (a) Veamos que $\operatorname{Hom}(A^\bullet, B^\bullet)$ es grupo abeliano bajo la operación

$$f^\bullet + g^\bullet = (f^i + g^i)_{i\in\mathbb{Z}}, \text{ para todo } f^\bullet = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}},\ g^\bullet = (g^i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

morfismos de $A^\bullet$ a $B^\bullet$. Claramente, $\operatorname{Hom}(A^\bullet, B^\bullet)$ es cerrado bajo $+$

$+$ es asociativa pues

$$\begin{aligned}(f^\bullet + g^\bullet) + h^\bullet &= (f^i + g^i)_{i\in\mathbb{Z}} + (h^i)_{i\in\mathbb{Z}}\\ &= ((f^i+g^i) + h^i)_{i\in\mathbb{Z}} = (f^i + (g^i + h^i))_{i\in\mathbb{Z}}\\ &= (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} + (g^i + h^i)_{i\in\mathbb{Z}} = f^\bullet + (g^\bullet + h^\bullet)\end{aligned}$$

El morfismo $0 = (0_{A^iB^i})_{i\in\mathbb{Z}}$, $0_{A^iB^i} \in \operatorname{Hom}(A^i, B^i)$, es la identidad del grupo.:

$$\begin{aligned}f^\bullet + 0 &= (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} + (0_{A^iB^i})_{i\in\mathbb{Z}} = (f^i + 0_{A^iB^i})_{i\in\mathbb{Z}}\\ &= (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} = f^\bullet.\end{aligned}$$

Similarmente, $0 + f^\bullet = f^\bullet$

· Además, todo morfismo $f^\bullet \in \mathrm{Hom}(A^\bullet, B^\bullet)$ tiene inversa dada por $-f^\bullet := (-f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$. En efecto,

$$f^\bullet + (-f^\bullet) = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} + (-f^i)_{i\in\mathbb{Z}} = (f^i + (-f^i))_{i\in\mathbb{Z}} = (0_{A^iB^i})_{i\in\mathbb{Z}} = 0.$$

· Por último, $+$ es conmutativa pues

$$\begin{aligned} f^\bullet + g^\bullet &= (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} + (g^i)_{i\in\mathbb{Z}} \\ &= (f^i + g^i)_{i\in\mathbb{Z}} = (g^i + f^i)_{i\in\mathbb{Z}} = (g^i)_{i\in\mathbb{Z}} + (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} \\ &= g^\bullet + f^\bullet. \end{aligned}$$

(b) Veamos que la composición es $\mathbb{Z}$-bilineal, i.e. dados $f^\bullet, f_1^\bullet, f_2^\bullet \in \mathrm{Hom}(A^\bullet, B^\bullet)$, $g^\bullet, g_1^\bullet, g_2^\bullet \in \mathrm{Hom}(B^\bullet, C^\bullet)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ mostramos

(b.1) $\quad g^\bullet \circ (\alpha_1 f_1^\bullet + \alpha_2 f_2^\bullet) = \alpha_1(g^\bullet \circ f_1^\bullet) + \alpha_2(g^\bullet + f_2^\bullet)$

(b.2) $\quad (\beta_1 g_1^\bullet + \beta_2 g_2^\bullet) \circ f^\bullet = \beta_1(g_1^\bullet \circ f^\bullet) + \beta_2(g_2^\bullet \circ f^\bullet)$

Notemos que

$$\begin{aligned} g^\bullet \circ (\alpha_1 f_1^\bullet + \alpha_2 f_2^\bullet) &= (g^i)_{i\in\mathbb{Z}} \circ (\alpha_1 f_1^i + \alpha_2 f_2^i)_{i\in\mathbb{Z}} \\ &= (g^i \circ (\alpha_1 f_1^i + \alpha_2 f_2^i))_{i\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ya que la composición en A es $\mathbb{Z}$-bilineal $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_1(g^i \circ f_1^i) + \alpha_2(g^i \circ f_2^i))_{i\in\mathbb{Z}} \\ &= \alpha_1(g^i \circ f_1^i)_{i\in\mathbb{Z}} + \alpha_2(g^i \circ f_2^i)_{i\in\mathbb{Z}} \\ &= \alpha_1(g^\bullet \circ f_1^\bullet) + \alpha_2(g^\bullet \circ f_2^\bullet) \end{aligned}$$

Esto muestra (b.1). De manera totalmente análoga se muestra (b.2).

(c) Basta ver que dos (co)complejos $A^\bullet$ y $B^\bullet$ admiten un producto. Para esto:

(c.1) Proponemos un candidato $(X^\bullet, p_1^\bullet : X^\bullet \to A^\bullet, p_2^\bullet : X^\bullet \to B^\bullet)$

(c.2) Mostramos que satisface la P.U. que caract. al producto de $A^\bullet$ y $B^\bullet$.

(c.1) Como $\mathcal{A}$ es abeliana, el producto de A^i y B^i existe, $\forall i \in \mathbb{Z}$ al que denotaremos X^i junto con las proyecciones canónicas $p_1^i : X^i \to A^i$, $p_2^i : X^i \to B^i$. Tomemos $p_1^\bullet = (p_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $p_2^\bullet = (p_2^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ donde d_X^i las construimos como sigue:

Para construir el mapa d_X^i que va de X^i a X^{i+1} basta usar la prop. U. del producto $(X^{i+1}, p_1^{i+1}, p_2^{i+1})$ ya que este es un objeto universalmente atrayente.

En efecto, al aplicar la P.U. resp. a las flechas exteriores del sig. diagrama obtenemos d_X^i (el cual lo hace conmutar):

$$\begin{tikzcd}
A^i \arrow[d, "d_A^i"'] & X^i \arrow[l, "p_1^i"'] \arrow[r, "p_2^i"] \arrow[d, "d_X^i"] & B^i \arrow[d, "d_B^i"] \\
A^{i+1} & X^{i+1} \arrow[l, "p_1^{i+1}"] \arrow[r, "p_2^{i+1}"'] & B^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Además $d^i \circ d^{i-1} = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. En efecto, con una idea similar a la anterior, obtenemos un único morfismo (en $\mathcal{A}$) α t.q. $p_1^{i+1} \circ \alpha = d_A^i \circ d_A^{i-1} \circ p_1^{i-1}$ y $p_2^{i+1} \circ \alpha = d_B^i \circ d_B^{i-1} \circ p_2^{i}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$

Lo que he hecho es aplicar la P.U. de $(X^{i+1}, p_1^{i+1}, p_2^{i+1})$ en el sig. d.: respecto a X^{i-1} y las flechas $d_A^i \circ d_A^{i-1} \circ p_1^{i-1}$ y $d_B^i \circ d_B^{i-1} \circ p_2^{i-1}$.

$$\begin{tikzcd}
A^{i-1} \arrow[d, "d_A^{i-1}"'] & X^{i-1} \arrow[l, "p_1^{i-1}"'] \arrow[r, "p_2^{i-1}"] \arrow[d, "d_X^{i-1}"] & B^{i-1} \arrow[d, "d_B^{i-1}"] \\
A^i \arrow[d, "d_A^i"'] & X^i \arrow[l, "p_1^i"'] \arrow[r, "p_2^i"] \arrow[d, "d_X^i"] & B^i \arrow[d, "d_B^i"] \\
A^{i+1} & X^{i+1} \arrow[l, "p_1^{i+1}"] \arrow[r, "p_2^{i+1}"'] & B^{i+1}
\end{tikzcd}$$

<u>Obs</u>: las flechas al interior del diagrama no juegan ningún rol, en el argumento.

Recordemos que $d_A^i \circ d_A^{i-1} = 0 = d_B^i \circ d_B^{i-1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Por tanto α satisface $p_1^{i+1} \circ \alpha = 0$ y $p_2^{i+1} \circ \alpha = 0$. Pero el morfismo cero también satisface esto. La unicidad implica $\alpha = 0$.

Como este diagrama conmuta, $p_1^{i+1} \circ (d_X^i \circ d_X^{i-1}) = 0$ y $p_2^{i+1} \circ (d_X^i \circ d_X^{i-1}) = 0$, $\forall i$; la unicidad de α implica $d_X^i \circ d_X^{i-1} = \alpha = 0$.

En resumen, nuestro candidato a producto de $A^\bullet$ y $B^\bullet$ es $(X^\bullet, p_1^\bullet, p_2^\bullet)$ donde $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $p_1^\bullet = (p_1^i : X^i \to A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $p_2^\bullet = (p_2^i : X^i \to B^i)_{i\in\mathbb{Z}}$

Veamos que de hecho, este obj. satisface la P.U. que caracteriza a un producto de $A^\bullet$ y $B^\bullet$. Es decir, dado $(Y^\bullet, q_1^\bullet, q_2^\bullet)$ con $Y^\bullet = (Y^i, d_Y^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $q_1^\bullet = (q_1^i : Y^i \to A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $q_2^\bullet = (q_2^i : Y^i \to B^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mostremos que existe un único morfismo de cocomplejos $Y^\bullet \xrightarrow{\psi^\bullet} X^\bullet$ t.q. $q_1^\bullet = p_1^\bullet \circ \psi^\bullet$, $q_2^\bullet = p_2^\bullet \circ \psi^\bullet$.

Esto es sencillo pues basta notar que, por cada $i\in\mathbb{Z}$, la P.U. de (X^i, p_1^i, p_2^i) implica la existencia de un único morfismo $\psi^i : Y^i \to X^i$ que hace conmutar el diagrama para todo $i\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
 & Y^i \arrow[dl, "q_1^i"'] \arrow[d, dashed, "\psi^i"] \arrow[dr, "q_2^i"] & \\
A^i & X^i \arrow[l, "p_1^i"] \arrow[r, "p_2^i"'] & B^i
\end{tikzcd}$$

Entonces tomemos $\psi^\bullet = (\psi^i)_{i\in\mathbb{Z}}$

Sin embargo, debemos comprobar que $\psi^\bullet$ es un morfismo de cocomp., i.e. que el sig. diag. conm. $\forall i\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] \arrow[d, "\psi^i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y^{i+1} \arrow[d, "\psi^{i+1}"] \\
X^i \arrow[r, "d_X^i"'] & X^{i+1}
\end{tikzcd}$$

La estrategia es expandir este diagrama incoorporando las proy.

$$\begin{tikzcd}
A^{i+1} & X^{i+1} \arrow[l, "p_1^{i+1}"] \arrow[r, "p_2^{i+1}"'] & B^{i+1}
\end{tikzcd}$$

y usar (de nuevo) la P.U. del prod (X

Por la P.U. de $(X^{i+1}, p_1^{i+1}, p_2^{i+1})$, existe un único morfismo β que hace conmutar cada uno de los sig. diag:

$$\begin{tikzcd}
X^i \arrow[d, "d_X^i"'] & Y^i \arrow[l, "\psi^i"'] \arrow[dd, "\beta"] \\
X^{i+1} \arrow[d, "p_1^{i+1}"'] & \\
A^{i+1} & X^{i+1} \arrow[l, "p_1^{i+1}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] \arrow[dd, "\beta"'] & Y^{i+1} \arrow[d, "\psi^{i+1}"] \\
 & X^{i+1} \arrow[d, "p_2^{i+1}"] \\
X^{i+1} \arrow[r, "p_2^{i+1}"'] & B^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Para que el diagrama izquierdo conmute, $\beta = d_X^i \circ \psi^i$.

Para que el derecho conmute, $\beta = \psi^{i+1} \circ d_Y^i$.

Luego $d_X^i \circ \psi^i = \psi^{i+1} \circ d_Y^i$ para todo $i\in\mathbb{Z}$.

Por tanto, $\psi^\bullet$ es un morf. de cocomplejos.

Ahora, es claro que $\psi^\bullet$ hace conmutar el sig. diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Y^\bullet \arrow[dl, "q_1^\bullet"'] \arrow[d, "\psi^\bullet"] \arrow[dr, "q_2^\bullet"] & \\
A^\bullet & X^\bullet \arrow[l, "p_1^\bullet"] \arrow[r, "p_2^\bullet"'] & B^\bullet
\end{tikzcd}$$

<u>Nota que</u>

$$p_1^\bullet \circ \psi^\bullet = (p_1^i \circ \psi^i)_{i\in\mathbb{Z}} = (q_1^i)_{i\in\mathbb{Z}} = q_1^\bullet$$

y

$$p_2^\bullet \circ \psi^\bullet = (p_2^i \circ \psi^i)_{i\in\mathbb{Z}} = (q_2^i)_{i\in\mathbb{Z}} = q_2^\bullet$$

Además $\psi^\bullet$ es el único morfismo $Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ con esta propiedad. Si $\varphi^\bullet : Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ fuese otro morfismo tal que $p_1^\bullet \circ \varphi^\bullet = q_1^\bullet$ y $p_2 \circ \varphi^\bullet = q_2^\bullet$, entonces $p_1^i \circ \varphi^i = p_1^i \circ \psi^i$ y $p_2^i \circ \varphi^i = p_2 \circ \psi^i$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ pero la unicidad de ψ^i, por cada $i \in \mathbb{Z}$, implica $\varphi^i = \psi^i$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Luego $\varphi^\bullet = \psi^\bullet$.

<u>En resumen</u>: El producto de $A^\bullet$ y $B^\bullet$ existe y es $(X^\bullet, p_1^\bullet, p_2^\bullet)$.

Esto concluye la demostración de que $\mathcal{C}(A)$ es ~~abeliana~~ aditiva $\boxed{\mathbb{Z}_2}$

<u>Lema 2.</u> Sea $f^\bullet : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ un morfismo en $\mathcal{C}(A)$. Entonces $f^\bullet$ tiene un kernel y un cokernel.

<u>Prueba.</u> Denotemos $f^\bullet = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Cada $f^i : A^i \longrightarrow B^i$ es un morfismo en A, así que tiene un kernel $(\mathrm{Ker} f^i, \ker f^i)$. Afirmamos que el kernel de $f^\bullet$ es $(\mathrm{Ker} f^i, \ker f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ junto con $(d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ donde $d^i : \mathrm{Ker} f^i \longrightarrow \mathrm{Ker} f^{i+1}$ se construye como sigue:

Dado que $f^i \circ d_A^{i-1} \circ \ker f^{i-1} = d_B^{i-1} \circ f^{i-1} \circ \ker f^{i-1} = d_B^{i-1} \circ 0 = 0$, existe un único morfismo $d^{i-1} : \mathrm{Ker} f^{i-1} \longrightarrow \mathrm{Ker} f^i$ t.q. e.s.d.c:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f^i \arrow[r, "\ker f^i"] & A^i \arrow[r, "f^i"] & B^i \\
\mathrm{Ker} f^{i-1} \arrow[u, "d^{i-1}"] \arrow[ur, "d_A^{i-1} \circ \ker f^{i-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

* Tomemos $d^\bullet = (d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ y verifiquemos que $d^{i+1} \circ d^i = 0$.

Como kernels son mónicos, basta ver que $\ker f^{i+2} \circ (d^{i+1} \circ d^i) = 0$.

Notemos $\ker f^{i+2} \circ d^{i+1} \circ d^i = d_A^{i+1} \circ \ker f^{i+1} \circ d^i$

$$= d_A^{i+1} \circ d_A^i \circ \ker f^i = 0 \circ \ker f^i = 0.$$

Por lo tanto, nuestro candidato a kernel de $f^\bullet$ es

$$\left(\left(\mathrm{Ker}\, f^i, \ker f^i \right), d^i \right)_{i \in \mathbb{Z}}$$

Obs: En realidad, me refiero al cocomplejo $(\mathrm{Ker}\, f^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Resta ver que este objeto satisface la prop. U. de un kernel.

Sea $(K^i, \partial^i)_{i \in \mathbb{Z}} = K^\bullet$ otro complejo ~~con la prop. que~~ y $\gamma^\bullet : K^\bullet \to A^\bullet$ ~~un~~ morf. de cocomplejos tal que $f^\bullet \circ \gamma^\bullet = 0$, i.e. $(f^i \circ \gamma^i)_{i \in \mathbb{Z}} = 0$

La p.U. del kernel de f^i implica que existe un único morfismo en A, $\theta^i : K^i \to \mathrm{Ker}\, f^i$, tal que $\gamma^i = \ker f^i \circ \theta^i$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f^i \arrow[r, "\ker f^i"] & A^i \arrow[r, "f^i"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] & B^i \\
K^i \arrow[u, "\theta^i"] \arrow[ur, "\gamma^i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se sigue que $\gamma^\bullet = (\ker f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \circ \theta^\bullet$. En consecuencia, el kernel de $f^\bullet$ es

$$(\mathrm{Ker}\, f^\bullet, \ker f^\bullet) = \left((\mathrm{Ker}\, f^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}, (\ker f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \right).$$

La demostración de que $f^\bullet$ tiene un cokernel es completamente análoga, y por tanto se omite. $\boxed{\Sigma}$

Obs: He olvidado verificar que $\theta^\bullet = (\theta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de $\mathcal{C}(A)$

Incluyo la prueba al reverso de la hoja.

Demostración de que $\theta^\bullet$ es un morfismo de (co)complejos

i.e. que este diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K^i \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d, "\theta^i"'] & K^{i+1} \arrow[d, "\theta^{i+1}"] \\
\operatorname{Ker} f^i \arrow[r, "d^i"'] & \operatorname{Ker} f^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Es suficiente:

$$\ker f^{i+1} \circ d^i \circ \theta^i = \ker f^{i+1} \circ \theta^{i+1} \circ \partial^i$$

Conocemos que el sig. diag. conmuta:

$$\begin{tikzcd}
K^i \arrow[r, "\theta^i"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Ker} f^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "\ker f^i"] & \operatorname{Ker} f^{i+1} \arrow[d, "\ker f^{i+1}"] & K^{i+1} \arrow[l, "\theta^{i+1}"'] \arrow[d, equal] \\
K^i \arrow[r, "\gamma^i"'] \arrow[d, equal] & A^i \arrow[r, "d^i_A"'] & A^{i+1} & K^{i+1} \arrow[l, "\gamma^{i+1}"] \arrow[d, equal] \\
K^i \arrow[r, equal] & K^i \arrow[u, "\gamma^i"] \arrow[r, "\partial^i"'] & K^{i+1} \arrow[u, "\gamma^{i+1}"'] \arrow[r, equal] & K^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\ker f^{i+1} \circ \theta^{i+1} \circ \partial^i &= \gamma^{i+1} \circ \partial^i \\
&= d^i_A \circ \gamma^i \qquad (\gamma^\bullet : K^\bullet \to A^\bullet \text{ es morf. de cocomplejos}) \\
&= d^i_A \circ \ker f^i \circ \theta^i \\
&= \ker f^{i+1} \circ d^i \circ \theta^i
\end{aligned}$$

como deseábamos.

Lema 3. Sea $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ un $\mathcal{C}(\mathcal{A})$-morfismo.

El morfismo inducido $\overline{f^\bullet} : \mathrm{Coim} f^\bullet \to \mathrm{Im} f^\bullet$ es un isomorfismo.

Prueba. Denotemos $f^\bullet = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$. La estrategia es usar el hecho de que cada mapa inducido $\overline{f^i}$ es un isomorfismo.

Veamos primero que $\overline{f^\bullet} = (\overline{f^i})_{i\in\mathbb{Z}}$. Tenemos $f^\bullet = q^\bullet \circ \overline{f^\bullet} \circ p^\bullet$ donde $p^\bullet = (\mathrm{coim} f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $q^\bullet = (\mathrm{im} f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Note que tanto $p^\bullet$ como $q^\bullet$ son morf. de cocomplejos pues se obtienen a partir de las P.U's que definen el kernel del cokernel de $f^\bullet$ y viceversa.

Entonces $f^\bullet = q^\bullet \circ \overline{f^\bullet} \circ p^\bullet$ implica $(f^i)_{i\in\mathbb{Z}} = (\mathrm{im} f^i \circ g^i \circ \mathrm{coim} f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ donde $\overline{f^\bullet} = (g^i)_{i\in\mathbb{Z}}$. La unicidad de la factorización canónica de $f^\bullet$ implica que $g^i = \overline{f^i}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Esto establece nuestra afirmación.

Como cada $\overline{f^i}$ es un isomorfismo, toda $\overline{f^i}$ tiene una inversa h^i. Notemos que $h^\bullet = (h^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es un morfismo de cocomplejos. En efecto, pues el sig. diag. conm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coim} f^i \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d, "\overline{f^i}"'] & \mathrm{Coim} f^{i+1} \arrow[d, "\overline{f^{i+1}}"] \\
\mathrm{Im} f^i \arrow[r, "\partial^i"'] & \mathrm{Im} f^{i+1}
\end{tikzcd}$$

Luego

$$\partial^i \circ \overline{f^i} = \overline{f^{i+1}} \circ \delta^i$$

$$\Rightarrow \partial^i = \overline{f^{i+1}} \circ \delta^i \circ h^i$$

$$\Rightarrow h^{i+1} \circ \partial^i = \delta^i \circ h^i \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Por último, es claro que $\overline{f^\bullet} \circ h^\bullet = 1_{\mathrm{Im} f^\bullet}$ y $h^\bullet \circ \overline{f^\bullet} = 1_{\mathrm{Coim} f^\bullet}$ lo que significa que $\overline{f^\bullet}$ es un isomorfismo.

Fin de la prueba. $\square$