Curso Introductorio de Topología

Christian Chávez

Contenido

https://sites.google.com/yachaytech.edu.ec/club-de-matemticas-yt/cursos/topolog%C3%ADa-2025s1?authuser=0

1. **Espacios topológicos**: topología sobre un conjunto, bases y subbases, subespacios topológicos
2. **Espacios métricos**: bolas y entornos, normas, métricas equivalentes, topología métrica
3. **Posición de un punto respecto a un conjunto**: clausura, interior, exterior, frontera
4. **Continuidad**: funciones continuas, homeomorfismos, convergencia y continuidad en espacios métricos
5. **Propiedades Topológicas**: conexidad, conexidad por caminos, densidad, axiomas de separación, axiomas de contabilidad, compacidad
6. **Construcciones topológicas**: espacios producto, espacios cociente

0. INTRODUCCIÓN

Guías de ejercicios: 60 % (2 guías)
Examen Final: 40 % (la última semana)
Nota aprobatoria: $\geq 7/10$

Horario (del 6 al 24 de enero)

Lunes, miércoles, viernes. 2pm - 4pm

Objetivo

* Aprender los conceptos básicos de Topología General.
* Tener una vista previa del curso de topología de Yachay Tech

Libro(s)

* Elementary Topology: Problem Textbook
  O. Ya. Viro, O. A. Ivanov, N. Yu. Netsvetaev, V. M. Kharlamov

* Topology - Jammes Munkres

* Topology Without Tears — Sidney A. Morris

* Mat327 - Topology (https://www.math.toronto.edu/ivan/mat327/?resources)

REPASO

"Def" Un conjunto es una colección de objetos

Un conjunto con un solo elemento es un singleton

Ejemplo $X = \{1, a, b, c, 2, ☆\}$ es un conjunto.

Sean A y B conjuntos.

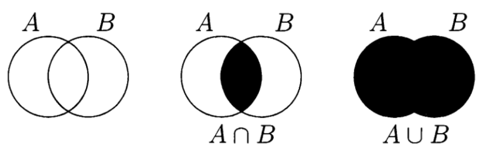
$A \subseteq B$ significa $x \in A \Rightarrow x \in B$

Igualdad $A = B \iff A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Unión $A \cup B = \{x \mid x \in A$ o $x \in B\}$

Intersección $A \cap B = \{x \mid x \in A$ y $x \in B\}$

Complemento (respecto a ...) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ y $x \notin B\}$



$B \setminus A = \{x \mid x \in B$ y $x \notin A\}$

Pero quisieramos unir/intersecar más de dos conjuntos!
No hay problema.

Sea $\mathcal{C}$ una colección (arbitraria) de conjuntos.

* La unión de los conjuntos que están en $\mathcal{C}$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a algún conjunto de $\mathcal{C}$.

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X = \{x \mid \exists X \in \mathcal{C} : x \in X\}$$

* La intersección de los conjuntos que están en $\mathcal{C}$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a cada conjunto de $\mathcal{C}$.

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X$$

$\cup, \cap$ se comportan como $\sum$

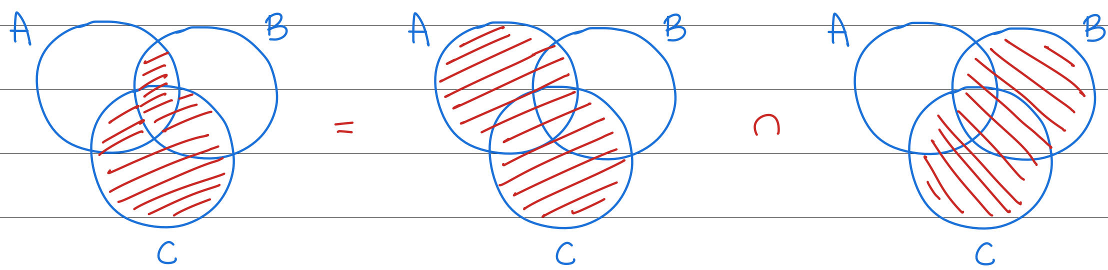
En particular, si $\mathcal{C} = \{A, B\}$,

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X = A \cup B \quad , \quad \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X = A \cap B$$

Más propiedades

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Para cualquier par de conjuntos A y B,

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$$

Sea A un conjunto y $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos. Entonces

$$A \cap \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} (A \cap X),$$

$$A \cap \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} (A \cap X)$$

Leyes de Morgan Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X. Entonces

$$X \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} (X \setminus A)$$

$$X \setminus \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} (X \setminus A)$$

Familias indexadas de conjuntos. "Es" una colección de conjuntos que se "enlista" con la ayuda de algún conjunto de índices. E.g. $(\{n\})_{n \in \mathbb{Z}^+}$, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Comprensión

(1) Qué es $\{\emptyset\}$? Cuántos elementos tiene?

(2) Cuál es correcto? (a) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ ✓

(b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ✓ (c) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ ✗

(3) Es $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ un singleton?

1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

1.1. DEFINICIÓN DE TOPOLOGÍA

Definición. Sea X un conjunto. Una topología sobre X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que

(I) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(II) La unión de cualquier colección de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{T}$ también pertenece a $\mathcal{T}$.

(III) La intersección de cualquier colección finita de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{T}$ también pertenece a $\mathcal{T}$.

El par $(X, \mathcal{T})$ se llama espacio topológico.
Los elementos de X se llaman puntos del espacio.
Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman conjuntos abiertos.

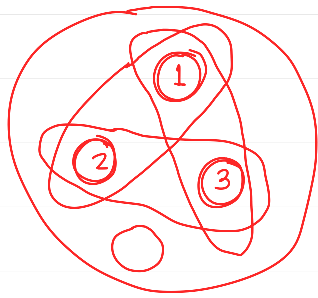
Cuando $\mathcal{T}$ se entienda del contexto, simplemente nos referimos a X como el espacio topológico.

EJEMPLOS

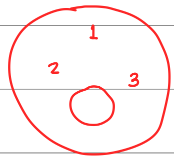
(1) Sea X cualquier conjunto. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X. Entonces

$$(X, \mathcal{P}(X))$$

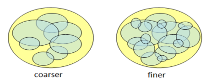
es un espacio topológico.
$\mathcal{P}(X)$ se llama topología discreta.



(2) [topología trivial] Sea X un conjunto. Sea $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
Entonces $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.
$\mathcal{T}$ se conoce como la topología indiscreta (o trivial)



La topología trivial es la más gruesa con la que se puede dotar un conjunto



(3) Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Sea

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

Entonces se verifica fácilmente que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X.

(4) Consideremos $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales.
Sea $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ el conjunto de uniones arbitrarias de intervalos (a,b) con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ es un esp. topológico.
A $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ se le conoce como topología usual de $\mathbb{R}$.

(i) $\emptyset = (0,0)$, $\quad \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (-n, n)$

(ii) La unión arbitraria de intervalos abiertos $\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$

(iii) La intersección de una cantidad finita de intervalos es un intervalo

(5) Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,e\}\}$.
Entonces $\mathcal{T}$ <u>no</u> es una topología sobre X pues

$$\{a\} \cup \{c,d\} = \{a, c, d\} \notin \mathcal{T}$$

$\Rightarrow \mathcal{T}$ no es cerrado bajo uniones arb.

Ejercicios.

(1) Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}$ la colección de todos los subconjuntos infinitos de X. ¿Es $\mathcal{T}$ una topología? No

(2) Sea X un conjunto infinito y $p \in X$. Muestra que

$$\mathcal{T}_1 = \{ A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ ó } X \setminus A \text{ es finito} \}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{ A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ ó } p \in A \}$$

son topologías sobre X.

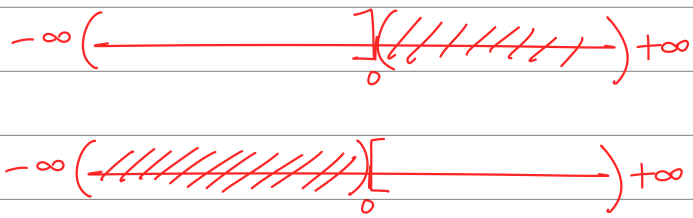
(3) Sea X un conjunto infinito. Determina si

$$\mathcal{T} = \{ A \subseteq X \mid A = X \text{ ó } X \setminus A \text{ es infinito} \}$$

es una topología sobre X. No lo es!

Considera $X = \mathbb{R}$,

$(0, +\infty) \in \mathcal{T}$



$(-\infty, 0) \in \mathcal{T}$

pero... $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \notin \mathcal{T}$

pues $X \setminus (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{0\}$ no es infinito.

Definición. Un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si su complemento es abierto.

$$\left(A \subseteq X \text{ cerrado} \iff X \setminus A \in \mathcal{T} \right)$$

> **Cuidado!** Que un conjunto <u>no</u> sea abierto, no implica que sea cerrado.
> Ser cerrado <u>no</u> es la negación de ser abierto (y viceversa).

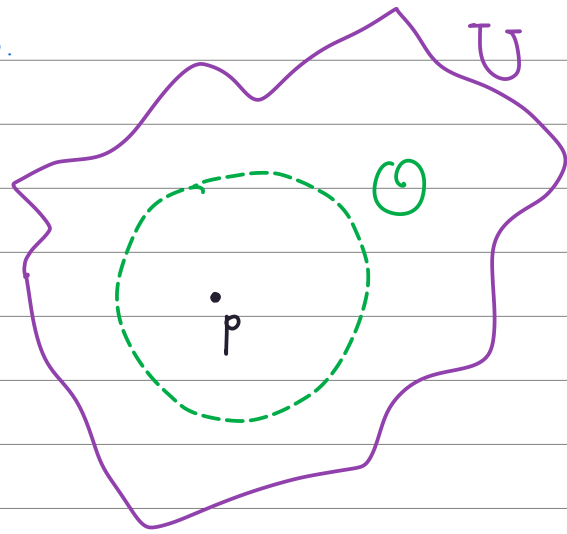
X esp. top.

Definición [Entorno] Sea $p \in X$. Un entorno o vecindad de p es un subconjunto $U \subseteq X$ t.q.

$$p \in \mathcal{O} \subseteq U$$

para algún $\mathcal{O} \subseteq X$ abierto.

U no tiene que ser abierto (pero podría serlo)



1.2 BASES Y SUBBASES

Una base nos permite describir un espacio topológico con menos información. (La idea es como en álgebra lineal, más o menos)

Definición. Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre un conjunto X. Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$ si

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \exists \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} : A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C .$$

Los elementos de una base se llaman abiertos básicos.

Ejemplo (1) Sea X dotado de la topología discreta. Entonces

$$\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$$

es una base para $\mathcal{P}(X)$.

(2) Sea $\mathcal{B} = \{ [a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base en $\mathbb{R}$. La topología que genera se llama la topología del límite inferior, y el espacio corresp. la línea de Sorgenfrey.

Ejercicio. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ dotado de la topología

$$\mathcal{T} = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\} \}$$

Encuentra una base para $\mathcal{T}$.

Una subbase nos permite reducir aún más la cantidad de subconjuntos necesarios para describir una topología.

<u>Definición.</u> Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Una subbase de $\mathcal{T}$ es un subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ t.q.

$$\left\{ \bigcap_{k=1}^{n} V_k \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}^+,\ V_k \in \mathcal{S} \right\}$$

(el conjunto de todas las intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{S}$) es una base para $\mathcal{T}$.

<u>Nota</u> La definición de base que dimos da las condiciones para que cierta colección de conjuntos sea una base para una topología dada.
Pero... podemos ir al revés: empezar con una colección de subconjuntos dada y <u>generar</u> una (única) topología.

<u>Proposición.</u> Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base para cierta topología en X si y solo si

(I) $\quad X = \bigcup \mathcal{B} \qquad$ ($\mathcal{B}$ "cubre" X)

$\rightarrow$ (II) $\quad \forall A, B \in \mathcal{B},\ \exists\, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} : \quad A \cap B = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$

<u>Demostración.</u> ($\Rightarrow$) Supón que $\mathcal{B}$ es una base para alguna topología $\mathcal{T}$ definida en X.

(I) Todo elemento de $\mathcal{T}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$.

En particular, X es la unión de elementos de $\mathcal{B}$. Luego

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B .$$

(II) Sean $A, B \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $A, B \in \mathcal{T}$. Luego $A \cap B \in \mathcal{T}$ (por qué?). Dado que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$, existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ t.q.

$$A \cap B = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C .$$

($\Longleftarrow$) Supongamos que (I) y (II) se cumplen. Demostraremos que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \;\middle|\; \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

es una topología y que $\mathcal{B}$ es base para $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Primero, $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ por definición, y $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ de (I) i.e. porque $\mathcal{B}$ cubre X.
Segundo, veamos que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es cerrada bajo uniones arbitrarias.
Sea $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Queremos ver $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.
Notemos que

$$\forall \alpha \in I, \quad A_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Rightarrow A_\alpha = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_\alpha} C \quad \text{para algún } \mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{B}$$

Entonces

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}_\alpha} C \right) = \bigcup_{C \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha} C = \bigcup \left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha \right)$$

Como $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{B}$, se sigue de la definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Tercero, veamos que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Basta ver que

$$A, B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \implies A \cap B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$$

(El argumento general se sigue inductivamente.)
Tomemos $A, B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Entonces

$$A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_\alpha} C \quad , \quad B = \bigcup_{D \in \mathcal{C}_\beta} D$$

para algunas colecciones $\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_\beta \subseteq \mathcal{B}$. Notemos que

$$A \cap B = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}_\alpha} C \right) \cap \left(\bigcup_{D \in \mathcal{C}_\beta} D \right)$$

$$= \bigcup_{C \in \mathcal{C}_\alpha} \left(C \cap \bigcup_{D \in \mathcal{C}_\beta} D \right)$$

$$= \bigcup_{C \in \mathcal{C}_\alpha} \bigcup_{D \in \mathcal{C}_\beta} \underline{(C \cap D)}$$

Por (II),

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{B}, \ \exists \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} : \quad A \cap B = \bigcup \mathcal{C}}$$

se sigue que

$$C \cap D = \bigcup_{E \in \mathcal{C}_{C,D}} E \quad , \quad \exists \mathcal{C}_{C,D} \subseteq \mathcal{B}.$$

para cada $C \in \mathcal{C}_C$ y $D \in \mathcal{C}_D$.
Luego, $C \cap D \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Ya habíamos mostrado que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es cerrada bajo uniones arbitrarias. Así, $A \cap B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Fin de la prueba. $\boxed{\mathfrak{z}}$

Ejercicio. Muestra que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ (la topología generada por $\mathcal{B}$) es única.

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}' = \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \iff \mathcal{T}_{\mathcal{B}}' \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}} , \ \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}'$$

Ejemplo Sea $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

La topología K en $\mathbb{R}$ es la topología generada por la base

$$\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b\} \cup \{(a,b) \setminus K \mid a < b\}$$

Propiedad. $\mathcal{T}_K \supseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, i.e. $\mathcal{T}_K$ es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}$.

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ es más gruesa que $\mathcal{T}_K$

Nota. Una base genera una única topología, pero una topología puede tener más de una base.

Ejercicio. Muestra que

$$\mathcal{B}_1 = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a,b \in \mathbb{Q}\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a,b \in \mathbb{I}\}$$

son bases en $\mathbb{R}$ y que además $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$.

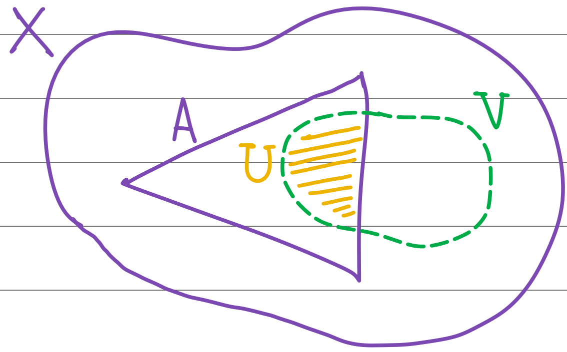
Importante $\mathcal{B}_1$ es contable. Entonces, $\mathbb{R}$ con la topología usual tiene una base contable.

1.3 SUBESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$.
La colección
$$\mathcal{T}_A = \{ A \cap \mathcal{O} \mid \mathcal{O} \subseteq X \text{ abierto} \}$$
es una topología sobre A, llamada la topología inducida de X sobre A.
El par $(A, \mathcal{T}_A)$ se llama subespacio de X.

EX Verifica que $\mathcal{T}_A$ es una topología

Así "se ven" los conjuntos abiertos de un subespacio...



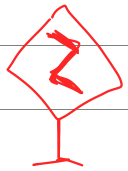
Siempre que tomemos un subconjunto de un esp. top., debemos asumir que está dotado de la topología inducida.

En álgebra lineal, solo ciertos subconjuntos de un espacio vectorial son subespacios. En Topología, cualquier subconjunto de un espacio top. es un subespacio.

Propiedades Sea A un subespacio de X.

(I) $B \subseteq A$ es cerrado en A si $B = A \cap F$ donde F es cerrado en X.

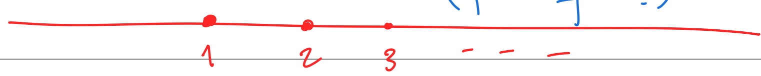
(II) U es abierto en X si y solo si todo punto de U tiene un entorno V en X t.q. $U \cap V$ es abierto en V.



$\mathcal{O} \subseteq A$ $\underbrace{\text{abierto}}_{\text{cerrado}}$ en A $\not\Rightarrow$ $\mathcal{O}$ $\underbrace{\text{abierto}}_{\text{cerrado}}$ en X

pero la conversa es verdad: si $\mathcal{O} \subseteq A$ t.q. $\mathcal{O} \in \mathcal{J}_X$
$\Rightarrow \mathcal{O} \cap A = \mathcal{O} \in \mathcal{J}_A$

Ejemplos. (1) La topología inducida en $\mathbb{Z}^+$ por la top. usual de $\mathbb{R}$ es la topología discreta sobre $\mathbb{Z}^+$. (por qué?)



(2) $[0,2]$ tomado como subespacio de $\mathbb{R}$ es abierto.

Comprensión. Es $[0,1)$ abierto en $[0,2]$? y en $(0,2)$?

Transitividad de la topología inducida. Sea $(X, \mathcal{J})$ un esp. top. Sean $A \subseteq B \subseteq X$. Entonces

$$(\mathcal{J}_B)_A = \mathcal{J}_A$$

i.e. la topología inducida en A por la topología relativa de B coincide con la topología inducida en A directamente por $\mathcal{J}$.

2. ESPACIOS MÉTRICOS

Definición. Sea M un conjunto. Una métrica sobre M es una función $d : M \times M \to [0, +\infty)$ l.q.

(I) $\forall x, y \in M: \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

(II) $\forall x, y \in M: \quad d(x,y) = d(y,x)$

(III) $\forall x, y, z \in M: \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Verificar (I) y (II) es fácil. La desigualdad triangular suele tomar más tiempo

El par (M, d) se llama espacio métrico.

Usando (I), (II) y (III) se puede mostrar que $d(x,y) \geq 0 \quad x, y \in M$

Ejemplos

(1) La función $\rho : X \times X \longrightarrow [0, +\infty) : (x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$ es una métrica para cualquier conjunto X.

Prueba. La condición (I) se cumple por la definición de ρ.

(II) es claro pues $\rho(x,y) = 0 \iff x = y \iff y = x \iff \rho(y,x) = 0$ y en el otro caso

$\rho(x,y) = 1 \iff x \neq y \iff y \neq x \iff \rho(y,x) = 1$

(III) Analicemos por casos.

GOAL $\quad \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Si $x = y$, $\rho(x,y) = 0$, así que se sigue inmediato.

Si $x \neq y$, y $x \neq z$ o $z \neq y$, entonces

$\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + (z,y) \leq 2$

Si $x \neq y$ y $x = z$ y $z = y$, entonces obtenemos una contradicción.

$x \neq y$ $\quad x = z$ $\quad z = y \Rightarrow x = y$

$\Uparrow$ $\quad \Uparrow$

$\neq 0$ $\quad \neq 0$

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

1	0	1	$\Rightarrow 1 \leq 1$ ✓
1	1	0	$\Rightarrow 1 \leq 1 + 0$ ✓
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~$\Rightarrow \boxed{1 \leq 0}$~~ ✗
1	1	1	$\Rightarrow 1 \leq 1 + 1 = 2$ ✓

(2) La función $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty) : (x, y) \longmapsto |x - y|$ es una métrica en $\mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty) : (x, y) \longmapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

métrica euclideana

(4) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty) : (x, y) \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

$p \geq 1$

Aquí $p \geq 1$.

Remark. Las métricas de (2), (3) y (4) se derivan de normas. En particular, (4) se obtiene de la norma-p en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios (1) Muestra que la suma/el max de métricas es una métrica.

(2) Muestra que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$.

(a) $d(x, y) = \max \{ |x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n \}$

(b) $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$

Subespacios. Sea (M, d) un espacio métrico y $A \subseteq M$. La restricción de d a $A \times A$, denotada $d|_{A \times A}$, es una métrica en A.
Luego, $(A, d|_{A \times A})$ es un espacio métrico.
Decimos que

$$(A, d|_{A \times A})$$

es un subespacio de (M, d).

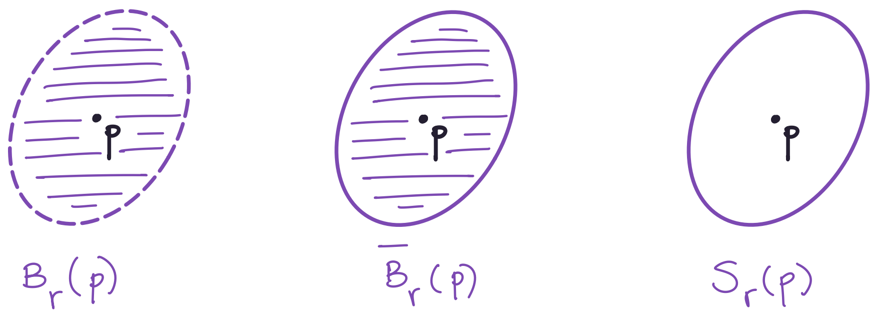
2.1. BOLAS Y ENTORNOS

Sea (M, d) un espacio métrico, $x \in M$ un punto, y $r \in \mathbb{R}^+$.
Definimos $\varepsilon > 0$

Bola abierta $\quad B_r(x) = \{ y \in M \mid d(x,y) < r \}$ centrada en x, de radio r

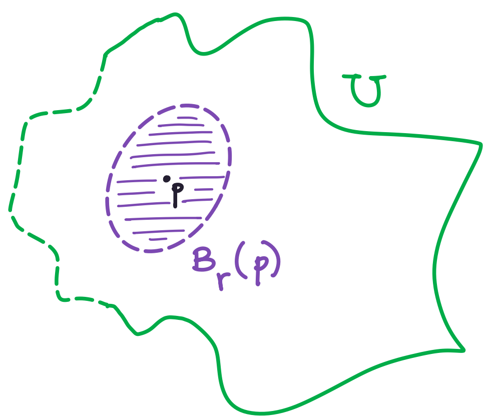
Bola cerrada $\quad \overline{B}_r(x) = \{ y \in M \mid d(x,y) \leq r \}$ centrada en x, de radio r

Esfera $\quad S_r(x) = \{ y \in M \mid d(x,y) = r \}$ centrada en x, de radio r



Entorno. Un conjunto $U \subseteq M$ es un entorno de un punto $p \in M$ si existe $r > 0$ t.q.

$$B_r(p) \subseteq U$$



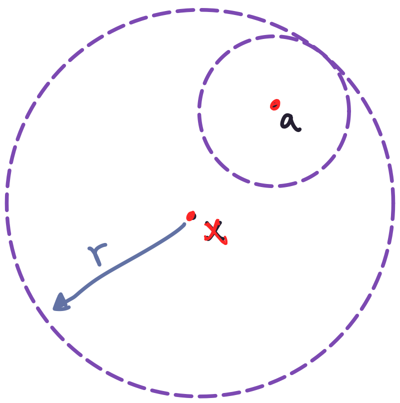
Nota. En $\mathbb{R}^n$, la bola cerrada $\overline{B}_1(0)$ se llama disco unitario y se denota D^n.
En $\mathbb{R}^n$, $S_1(0)$ se llama $(n-1)$-esfera y se denota S^{n-1}.

Obs $\quad D^1$ es un ______ $\qquad S^0$ es ______

$\quad D^2$ es un ______ $\qquad S^1$ es ______

Ejercicio. Sea (M, ρ) un espacio métrico y $a, x \in M$ un par de puntos. Tomemos $\underbrace{r > \rho(a,x)}_{\text{why?}}$. Demostremos que

$$B_{r-\rho(a,x)}(a) \subseteq B_r(x).$$



Sea $y \in B_{r-\rho(a,x)}(a)$

Queremos ver que $\rho(y,x) < r$.
Sabemos que

$$\rho(a,y) < r - \rho(a,x)$$
$$\Rightarrow \rho(a,y) + \rho(a,x) < r$$

Por la desigualdad triangular,

$$\rho(y,x) \leq \rho(y,a) + \rho(a,x)$$

Luego $\rho(y,x) < r$, i.e. $y \in B_r(x)$. Listo.

Conjuntos acotados. Un subconjunto A de un espacio métrico (M,d) es acotado si existe $r > 0$ t.q.

$$\forall x, y \in A : d(x,y) < r.$$

Equivalentemente,

$$A \text{ acotado} \iff A \subseteq \text{alguna bola}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}_{|x|} \text{ acotado} \iff \exists \varepsilon > 0, \forall x \in A : |x| < \varepsilon$$

2.2. NORMAS Y ESPACIOS NORMADOS

Definición. Sea V un espacio vectorial. Una norma en V es una función $V \to [0,+\infty)$ que satisface

$$V \to [0,+\infty)$$
$$x \mapsto \|x\|$$

(I) $\forall x \in V: \ \|x\| = 0 \iff x = 0$

El 0 del espacio vectorial

Homogeneidad (II) $\forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Desigualdad Triangular (III) $\forall x, y, z \in V: \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Un espacio vectorial dotado de una norma se llama un espacio normado.

Ejercicio. Muestra $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in V$.

Proposición. Si $\|\cdot\|$ es una norma en V, entonces

$$d: V \times V \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$(x,y) \longmapsto \|x-y\|$$

es una métrica en V. Luego, (V, d) es un espacio métrico.

Obs. $(V, \|\cdot\|)$ esp. n. $\rightsquigarrow$ (V, d) esp. m.

Demostración. Sean $x, y, z \in V$. Primero, notemos que

$$d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$$

Segundo, $d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x)$.

Tercero, $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$
$= d(x,z) + d(z,y)$

Concluimos que d es una métrica en V.
canónica

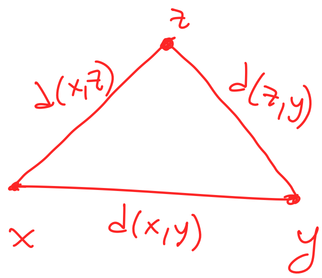
Comparar las def. de métrica y norma

Métrica

(I) $\forall x,y \in M: \; d(x,y)=0 \iff x=y$

(II) $\forall x,y \in M: \; d(x,y)=d(y,x)$

(III) $\forall x,y,z \in M: \; d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$



Norma

(I) $\forall x \in V: \; \|x\|=0 \iff x=0$

El 0

(II) $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \; \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

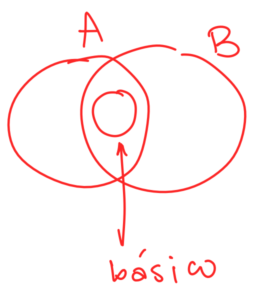
(III) $\forall x,y,z \in V: \; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2.3. TOPOLOGÍA MÉTRICA

Proposición. La colección de todas las bolas en un espacio métrico es una base para alguna topología (la topología métrica)

única

Prueba. Recordemos lo siguiente:



Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base para cierta topología en X si y solo si

(I) $X = \bigcup \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ "cubre" X)

(II) $\forall A, B \in \mathcal{B}, \exists \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} : A \cap B = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$

La intersección de básicos es la unión de básicos

Sea (M, d) un espacio métrico y $\mathcal{B}$ la colección de todas sus bolas abiertas.

(I) Fijemos un punto $p \in M$. Notemos $M = \bigcup_{r>0} B_r(p)$

(II) Sean $B_r(x)$, $B_R(y) \in \mathcal{B}$. Si $B_r(x) \cap B_R(y) = \emptyset$, no hay nada que probar.

Si $B_r(x) \cap B_R(y) \neq \emptyset$, entonces existe $p \in B_r(x) \cap B_R(y)$.

Nota que $r - d(p,x) > 0$ y $R - d(p,y) > 0$.

Tomemos

$$0 < \varepsilon < \min\{r - d(p,x),\ R - d(p,y)\}$$

Entonces

$$B_\varepsilon(p) \subseteq B_r(x) \quad y \quad B_\varepsilon(p) \subseteq B_R(y)$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(p) \subseteq B_r(x) \cap B_R(y)$$

Como p fue arbit., $\displaystyle\bigcup_{\phi \in B_r(x) \cap B_R(y)} B_\varepsilon(\phi) \subseteq B_r(x) \cap B_R(y)$.

p se comporta como una variable muda

La otra inclusión es evidente:

$$z \in B_r(x) \cap B_R(y) \Rightarrow z \in B_{\varepsilon_z}(z) \subseteq \bigcup_{p \in B_r(x) \cap B_R(y)} B_\varepsilon(p)$$

Por tanto, hemos probado que la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Se sigue de la proposición citada que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología en M.

Fin de la prueba. $\square$

[métrica $\Rightarrow$ topología (top. m.)]

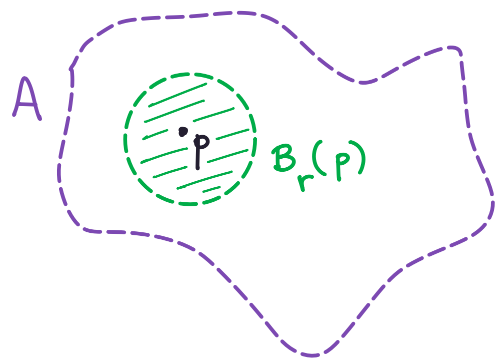
La topología generada por la colección de las bolas abiertas de (M, d) se llama topología métrica. La denotamos $\mathcal{T}_d$.

Observación $\underset{\text{esp. métrico}}{(M, d)} \rightsquigarrow \underset{\text{esp. top.}}{(M, \mathcal{T}_d)}$

Los abiertos de un espacio métrico. Sea (M, d) un esp. m.

$$A \subseteq M \text{ abierto } \iff \forall p \in A, \exists r > 0 : B_r(p) \subseteq A$$

Espacio metrizable. Un espacio topológico es metrizable si su topología está generada por una métrica.



2.4. MÉTRICAS EQUIVALENTES

Definición. Dos métricas son topológicamente equivalentes si generan la misma topología.

Definición. Dos métricas d_1, d_2 en un conjunto X son fuertemente equivalentes si y solo si existen constantes positivas α, β t.q.

F.E ⇒ T.E

$$\forall x, y \in X: \quad \alpha\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y)$$

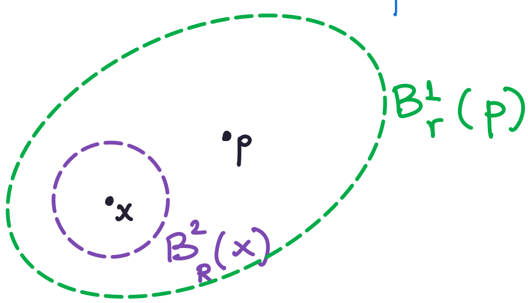
Proposición. Si dos métricas son fuertemente equivalentes, entonces son topológicamente equivalentes.

Prueba. Supongamos que d_1 y d_2 son dos métricas en un conjunto X que son f.e. Entonces, existen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ t.q.

$$\alpha\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta\, d_1(x,y), \quad \forall x, y \in X.$$

Queremos mostrar $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$. Veamos $\mathcal{T}_{d_1} \subseteq \mathcal{T}_{d_2}$.

Basta mostrar que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_{d_2}$ (por qué?)
Tomemos $B^1_r(p) \in \mathcal{B}_1$.
Veamos que $B^1_r(p)$ es la unión de bolas abt. con d_2.
Fija $x \in B^1_r(p)$. Hallemos un $R > 0$ t.q. $B^2_R(x) \subseteq B^1_r(p)$



$$\boxed{\forall x,y\in X:\quad \alpha d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le \beta d_1(x,y)}$$

Nota $\quad a\in B^2_R(x) \Rightarrow d_2(a,x)<R$

$$\Rightarrow \alpha d_1(a,x)\le d_2(a,x)<R$$

$$\Rightarrow d_1(a,x)<\frac{R}{\alpha}$$

Además

$$d_1(a,p)\le d_1(a,x)+d_1(x,p)$$

$$<\frac{R}{\alpha}+d_1(x,p)$$

Si queremos que $a\in B^1_r(p)$, entonces debemos imponer

$$\frac{R}{\alpha}+d_1(x,p)<r$$

$$\Rightarrow R<\alpha(r-d_1(x,p))$$

Luego, $B^2_R(x)\subseteq B^1_r(p)$ ya que a fue arbitrario.

Como x es arbitrario, $\displaystyle\bigcup_{x\in B^1_r(p)} B^2_R(x)=B^1_r(p)$

R depende de x

Dado que $\displaystyle\bigcup_{x\in B^1_r(p)} B^2_R(x)\in \mathcal{T}_{d_2}$

obtenemos

$$B^1_r(p)\in \mathcal{T}_{d_2}$$

Como $B^1_r(p)$ lo tomamos arbitrariamente en $\mathcal{B}_{d_1}$, se sigue

$$\mathcal{B}_{d_1}\subseteq \mathcal{T}_{d_2}\Rightarrow \mathcal{T}_{d_1}\subseteq \mathcal{T}_{d_2}$$

Un argumento enteramente similar nos muestra $\mathcal{T}_{d_1}\supseteq \mathcal{T}_{d_2}$
Se sigue que $\mathcal{T}_{d_1}=\mathcal{T}_{d_2}$, como queríamos. $\boxed{\xi}$

F.E $\Rightarrow$ T.E.

(tipo examen)

Ejercicio. Sea d una métrica en un conjunto X.

(I) Muestra que
$$D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$
es una métrica en X.

(II) Muestra que d y D son equivalentes.

(III) Muestra que
$$\rho : X \times X \longrightarrow [0, +\infty) : (x,y) \longmapsto \min\{1, d(x,y)\}$$
es una métrica en X.

(III) Supón que $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ es una función monótona creciente t.q. $f(0) = 0$ y $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, $\forall x, y \geq 0$.
Muestra que
$$f \circ d$$
es una métrica en X.

3. POSICIÓN DE UN PUNTO RESPECTO A UN CONJUNTO

(más vocabulario)

Tipos de puntos

Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$.
Un punto $p \in X$ es

- un punto **interior** de A si existe un entorno de p contenido en A

- un punto **exterior** de A si existe un entorno de p que no intersecta a A.

- un punto de **frontera** (= borde) de A si todo entorno de p intersecta a A y a $X \setminus A$.
  $\forall U$ entorno de p t.q. $A \cap U \neq \emptyset \neq (X \setminus A) \cap U$

pto frontera $\Rightarrow$ pto adherente

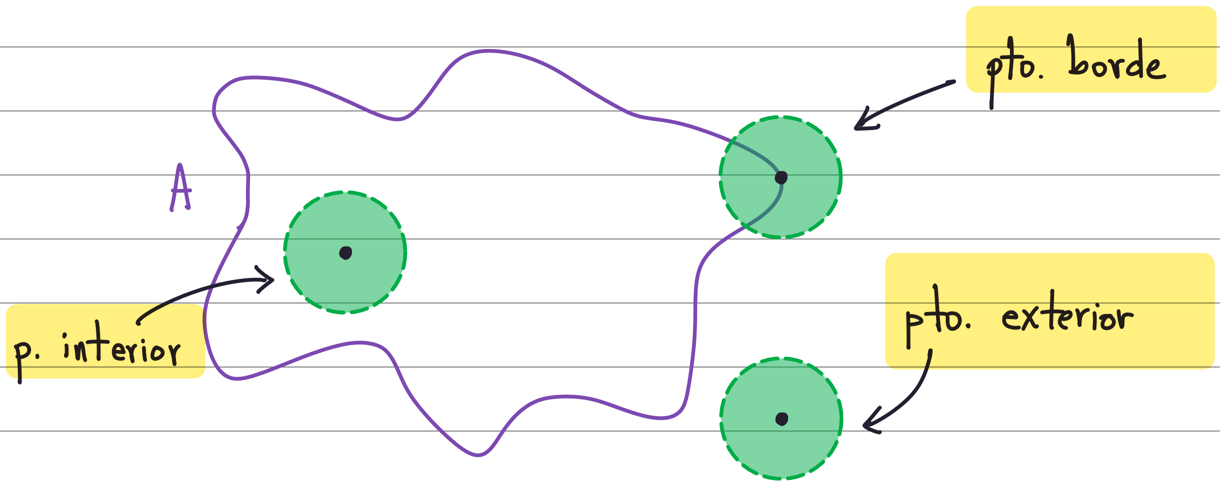
- un punto **adherente** (= clausura) de A si todo entorno de p intersecta a A.

- un punto **límite** (= punto de acumulación) de A si todo entorno de p intersecta $A \setminus \{p\}$. p pto lím $\Leftrightarrow$ pto adherente de $A \setminus \{p\}$

- un punto **aislado** si no es un punto límite.

def p pto lím. de A $\Leftrightarrow$ $\forall U \in \mathcal{N}(p) : U \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset$

p pto aislado de A $\Leftrightarrow$ $\exists U \in \mathcal{N}(p) : U \cap (A \setminus \{p\}) = \emptyset$


pto. borde
A
p. interior
pto. exterior

3.1. INTERIOR Y EXTERIOR

$G \subseteq A$ ab. $\Rightarrow G \subseteq A^\circ$

Sea A subconjunto de un espacio topológico X.

$G \subseteq X$ abierto : $G \subseteq A \Rightarrow G \subseteq A^\circ$

Def. El interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A. Se denota A° o $\operatorname{Int} A$.

Prop. El interior de A es la unión de todos los abiertos de X contenidos en A.

Prueba. Queremos mostrar $A^\circ = \bigcup\limits_{\substack{\mathcal{O} \text{ abierto} \\ \mathcal{O} \subseteq A}} \mathcal{O}$.

Sabemos que A° es abierto y está contenido en A.
Luego,
$$A^\circ \subseteq \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \text{ abierto} \\ \mathcal{O} \subseteq A}} \mathcal{O}.$$

Ahora, $\bigcup\limits_{\substack{\mathcal{O} \text{ abierto} \\ \mathcal{O} \subseteq A}} \mathcal{O}$ es abierto (por qué?) y está contenido en A, pero A° es el abierto más grande contenido en A, así que tiene que contener a cualquier otro abierto contenido en A. En particular, $\bigcup\limits_{\substack{\mathcal{O} \text{ abierto} \\ \mathcal{O} \subseteq A}} \mathcal{O} \subseteq A^\circ$.

Se sigue la igualdad.
Fin de la prueba. $\boxed{\Sigma}$

Prop. El interior de A es igual al conjunto de todos los puntos interiores de A, i.e. ($x \in A^\circ \iff x$ pto int de A)

$$A^\circ = \{ x \in X \mid \exists\, U \text{ entorno de } x \text{ t.q. } U \subseteq A \}$$

($\subseteq$)

Prueba. Tomemos $x \in A^\circ$. Queremos ver que x es un punto int. de A. Sabemos

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \text{ abierto} \\ \mathcal{O} \subseteq A}} \mathcal{O}. \qquad \Big(x \in A^\circ \iff x \in \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \text{ abierto} \\ \mathcal{O} \subseteq A}} \mathcal{O} \Big)$$

Entonces $x \in A^\circ \Rightarrow \exists\, \mathcal{O} \subseteq A$ abierto t.q. $x \in \mathcal{O}$.
Es claro que $\mathcal{O}$ es un entorno de x contenido en A.
Esto significa que x es un punto interior de A.

($\supseteq$) Veamos el otro sentido. Supón que x es un punto interior de A. Entonces existe un entorno U de x t.q. $U \subseteq A$.
Por def de entorno, existe un abierto $\mathcal{O}$ t.q.

$$x \in \mathcal{O} \subseteq U.$$

Entonces $x \in \mathcal{O} \subseteq A$. Hemos encontrado un abierto contenido en A. Como A° es el abierto más grande contenido en A, A° tiene que contener a $\mathcal{O}$. Así $x \in \mathcal{O} \subseteq A^\circ \Rightarrow x \in A^\circ$.

Fin de la demostración. $\boxed{\xi}$

Ejercicios En $\mathbb{R}$, prueba que

(a) $\operatorname{Int}[a,b) = (a,b)$

(b) $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \emptyset$

(c) $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$

Ejercicio. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ dotado de la topología

$$\mathcal{J} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

Encuentra el interior de $\{a,b,d\}$.

Def. El exterior de un conjunto $A \subseteq X$ es el conjunto abierto más grande disjunto de A. Se denota $\operatorname{Ext} A$.

Fact. $\operatorname{Ext} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Propiedades del Interior (0) $A^\circ \subseteq A$

(I) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$

(II) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

(III) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(IV) A abierto $\iff A = A^\circ$

Ejercicio Muestra que es falso que

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$$

3.2. CLAUSURA

Sea $A \subseteq X$, X esp. top.

Def. La clausura de A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A. Se denota $\overline{A}$ o $\mathrm{Cl}\, A$.

Prop. $\mathrm{Cl}\, A = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$.

Prop. $\mathrm{Cl}\, A$ es cerrado.

Prop. $\mathrm{Cl}\, A = \{ x \in X \mid x \text{ punto adherente de } A \}$

Propiedades de la clausura (0) $A \subseteq \overline{A}$

(I) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(II) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(III) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\boxed{\text{(IV)} \quad A \text{ cerrado} \iff A = \overline{A}}$

(V) $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^{\circ}$

Ejercicios En $\mathbb{R}$, prueba que

(a) $\mathrm{Cl}[a,b) = [a,b]$

(b) $\mathrm{Cl}\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

(c) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

Conjuntos densos

Sean $A, B \subseteq X$, X esp. top.

Def. A es denso en B si $\overline{A} = B$

A es denso en todas partes si $\overline{A} = X$

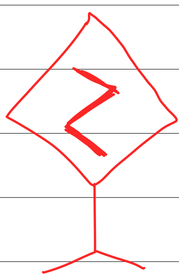
Prop $\overline{A} = X \iff \forall\, \mathcal{O} \subseteq X$ abierto, $\mathcal{O} \neq \emptyset$, $A \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$

Ejemplo $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Fact. $\operatorname{Ext} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

Def. Un conjunto es nunca denso si su exterior es denso en todas partes.

A nunca denso $\iff \overline{\operatorname{Int}(X \setminus A)} = X$



Ser nunca denso no es la negación de ser denso en todas partes.

$A \supseteq A^\circ$

3.3. BORDE o FRONTERA

Sea $A \subseteq X$, X esp. top.

Def. La frontera de A es $\overline{A} \setminus A^\circ$. Se denota ∂A o $\mathrm{Fr}\,A$.

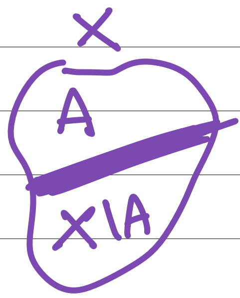
Prop. La frontera de A es igual al conjunto de puntos frontera de A.
i.e.

$$\partial A = \left\{ x \in X \;\middle|\; \forall U \text{ entorno de } x,\ \begin{array}{l} U \cap A \neq \emptyset, \\ U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

Propiedades

(I) A cerrado $\iff$ $\partial A \subseteq A$

(II) $\partial A = \partial(X \setminus A)$



(III) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

3.4. PUNTOS LÍMITES & P. AISLADOS

Sea $A \subseteq X$, X esp. top.

Notación. A' : conjunto de ptos límite de A.

p pto lim $\iff \forall U \in \mathcal{N}(p) : U \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset$

Propiedades

(I) $A' \subseteq \overline{A}$

(II) A cerrado $\iff$ $A' \subseteq A$

Recuerda $\boxed{\text{(IV)} \quad A \text{ cerrado} \iff A = \overline{A}}$

4. CONTINUIDAD

Una función es un conjunto! Casi todo es un conjunto!

4.0. IMAGEN Y PREIMAGEN

Recordemos conceptos básicos de funciones

Consideremos una función $f: A \longrightarrow B$. Decimos que f es una

Inyección si $\forall a, a' \in A: \ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

Sobreyección si $\forall b \in B, \exists a \in A: \ b = f(a)$

Biyección si es a la vez inyección y sobreyección

Nota f biyección $\Longleftrightarrow$ f es invertible.

Propiedades

(I) La composición de inyecciones es una inyección

(II) La composición de sobreyecciones es una sobreyección

(III) La composición de biyecciones es una biyección

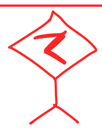
Imagen directa Sea $A \subseteq X$. La imagen de A bajo $f: X \to Y$ es

$$f(A) := \{ f(a) \mid a \in A \}$$

La imagen de todo el dominio, i.e. $f(X)$, se suele denotar $\operatorname{Im} f$.

Preimagen (img. inv.) Sea $B \subseteq Y$. La preimagen de B bajo $f: X \to Y$ es

$$f^{-1}(B) := \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$$



La función no tiene que ser invertible!

Cuidado: La preimagen de B no se define como un conjunto cuya imagen es B

Algunas Propiedades

Sea $f: X \longrightarrow Y$, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$.

(I) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

(II) $C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

(III) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(III) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(IV) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(V) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

(VI) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

(VII) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

(VIII) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

si f es uno-a-uno, $A = f^{-1}(f(A))$

(IX) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

si f es sobreyectiva, $f(f^{-1}(C)) = C$

(X) $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$

Si f es biyectiva, todas son igualdades

Ejercicio Demuéstralas

4.1. DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Sean dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

<u>Definición.</u> Una función $f: X \to Y$ es continua si

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_X$$

<u>Prop.</u> $f: X \to Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X para todo $F \subseteq Y$ cerrado.

<u>Prueba.</u> $(\Rightarrow)$ Supón que f es continua. Sea $F \subseteq Y$ cerrado. Entonces

$$Y \setminus F \text{ abierto} \implies f^{-1}(Y \setminus F) \text{ abierto}$$

Recuerda

$A \subseteq X$ es cerrado $\iff X \setminus A$ es abierto

Sabemos que

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$

así que

$$f^{-1}(F) \text{ es cerrado.}$$

$(\Leftarrow)$ Supón que

$$F \subseteq Y \text{ cerrado} \Rightarrow f^{-1}(F) \text{ cerrado}$$

Veamos que f es continua, i.e.

$$\mathcal{O} \subseteq Y \text{ abierto} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}) \text{ abierto}$$

Toma $\mathcal{O} \subseteq Y$ abierto. Como $Y \setminus \mathcal{O}$ es cerrado, $f^{-1}(Y \setminus \mathcal{O}) = X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$ es cerrado, es decir,

$$f^{-1}(\mathcal{O}) \text{ es abierto.}$$

$\square$

Pregunta ¿Bajo que condiciones

$$\psi : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (X, \mathcal{J})$$

es continua? Aquí $\mathcal{J}$ es cualquier top. en X.

Siempre es verdad!

Ejercicio Muestre que

(I) La identidad de un espacio topológico es continua.

(II) Las funciones constantes son continuas.

(III) La composición de funciones continuas es continua.

(IV) Si $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ dos topologías sobre un conjunto X,

$$Id_X : (X, \mathcal{J}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{J}_2)$$

es continua si y solamente si $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_1$.

(V) Toda restricción de una función continua es continua.

(VI) Si $f: X \longrightarrow Y$ es continua, $\bar{f}: X \longrightarrow f(X)$ también es continua. La conversa también es verdad.

(Quiz) $f: X \longrightarrow Y$ es continua si y solo si

$$\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\bar{A}) \quad \forall A \subseteq Y$$

cualq. subconjunto.

Definición Local de Continuidad Sea $f: X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Sea $x \in X$. Decimos que f es continua en x si

$$\forall V \in \mathcal{N}(f(x)),\ \exists U \in \mathcal{N}(x) : f(U) \subseteq V$$

$\boxed{\text{Teorema. Una función es continua ssi es continua en cada punto.}}$

Prueba $(\Rightarrow)$ Ejercicio.

$(\Leftarrow)$ Sea $f: X \to Y$, con X, Y esp. top.
Supón

$$\forall V \in \mathcal{N}(f(x)),\ \exists U \in \mathcal{N}(x) : f(U) \subseteq V.$$

Sea $\mathcal{O} \subseteq Y$ abierto. Veamos que $f^{-1}(\mathcal{O})$ es abierto.
Toma $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Nota

$$x \in f^{-1}(\mathcal{O}) \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{O}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} \text{ es un entorno de } f(x)$$

$$\Rightarrow \exists U \in \mathcal{N}(x) : f(U) \subseteq \mathcal{O}$$

$$\Rightarrow x \in U \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$$

$$\Rightarrow x \text{ es punto interior de } f^{-1}(\mathcal{O})$$

Un conjunto es abierto si es entorno de todos sus puntos

Por tanto

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \operatorname{Int} f^{-1}(\mathcal{O})$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}) \text{ es abierto.}$$

$\boxed{\xi}$

otra manera de decir...

"Una función es continua si es continua en cada punto"

Proposición (Criterio Local de Continuidad)

Recuerda Un entorno de un punto es un conjunto que contiene un abierto que contiene al punto.

Una función $f: X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es continua si y solo si

$$\forall x \in X,\ \exists U \in \mathcal{N}(x):\quad f|_U \text{ es continua} \quad (*)$$

Prueba ($\Rightarrow$) Es fácil. Toma $U = X$ para cada $x \in X$.

($\Leftarrow$) Supón que $(*)$ es verdad. Toma $\mathcal{O} \subseteq Y$ abierto. Queremos ver que $f^{-1}(\mathcal{O})$ es abierto.

Sea $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Por $(*)$, existe $U \in \mathcal{N}(x)$ t.q. $f|_U$ es continua. Entonces

$$(f|_U)^{-1}(\mathcal{O}) \quad \text{es abierto en } X.$$

Nota que

$$\begin{aligned}
(f|_U)^{-1}(\mathcal{O}) &= \{ x \in \mathrm{Dom}(f|_U) \mid f|_U(x) \in \mathcal{O} \} \\
&= \{ x \in U \mid f(x) \in \mathcal{O} \} \\
&= \{ x \in X \mid f(x) \in \mathcal{O},\ x \in U \} \\
&= f^{-1}(\mathcal{O}) \cap U
\end{aligned}$$

Luego $f^{-1}(\mathcal{O}) \cap U$ es un entorno de x en U (visto como subespacio topológico). Como x fue arbitrario, se sigue que todo punto de $f^{-1}(\mathcal{O})$ es un punto interior. Luego,

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \left(f^{-1}(\mathcal{O}) \right)^{\circ}$$

i.e.,

$$f^{-1}(\mathcal{O}) \quad \text{es abierto.} \quad \boxed{\Xi}$$

4.2. HOMEOMORFISMOS

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos.

Definición. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo si

(I) f es continua
(II) f es invertible
(III) f^{-1} es continua

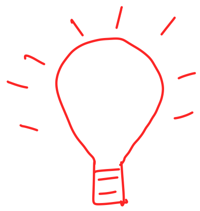
> **SLOGAN**
> Una función continua es un homeomorfismo si tiene inversa continua.

En este caso decimos que X y Y son homeomorfos (topológicamente equivalentes).

Notación $X \cong Y$

> $\cong$ es una relación de equivalencia

> Todo lo que se pueda expresar con conjuntos abiertos es una P.T.



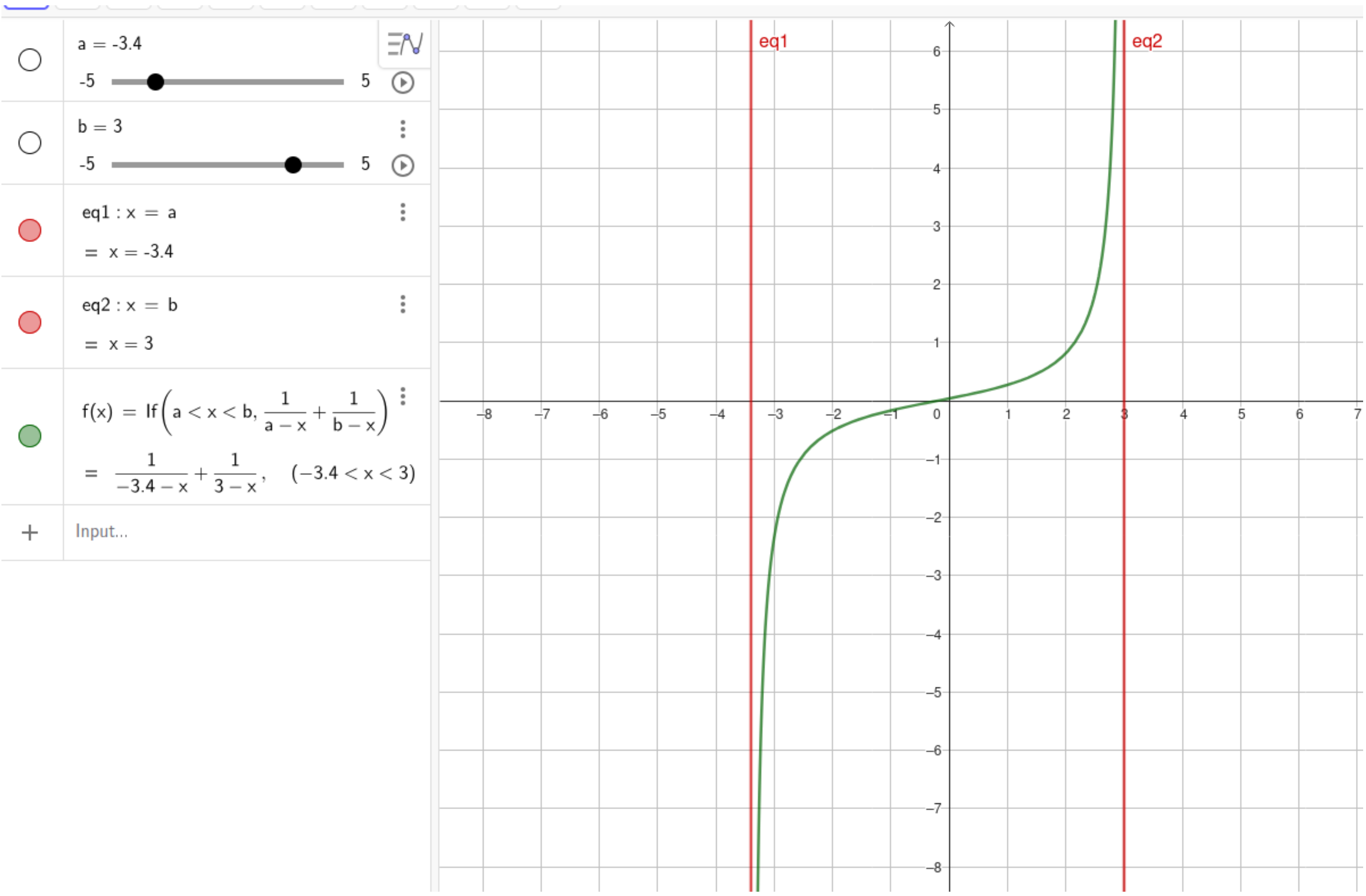
Dos espacios homeomorfos comparten absolutamente TODAS sus propiedades topológicas

Ejemplo (I) La función identidad de cualquier espacio topológico es un homeomorfismo.

(II) Todo intervalo abierto es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
En efecto, la función $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-\cancel{x}}$$

es un homeomorfismo.


a = -3.4
-5
5
b = 3
-5
5
eq1 : x = a
= x = -3.4
eq2 : x = b
= x = 3
f(x) = If(a < x < b, 1/(a − x) + 1/(b − x))
= 1/(−3.4 − x) + 1/(3 − x), (−3.4 < x < 3)
Input...
eq1
eq2

(III) $(0,1) \cong (a,b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \ a<b$

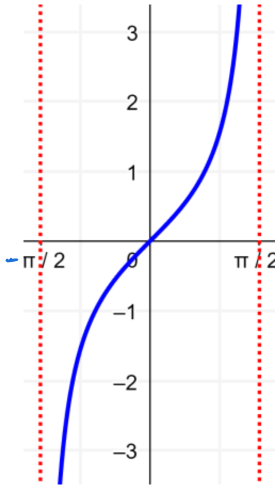
(IV) $[0,1] \cong [a,b] \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \ a<b$

(V) $[0,1) \cong [a,b) \cong (a,b] \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \ a<b$

(VI) $[0,1) \cong [0,+\infty) \cong (-\infty, 0]$

(VII) La tangente

$$\begin{aligned} \tan : \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan x \end{aligned}$$

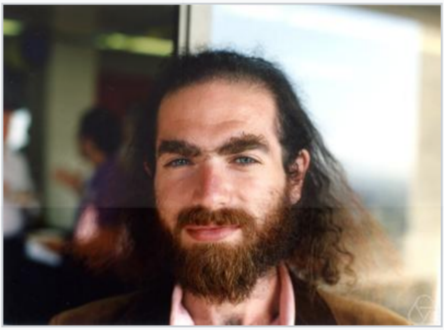


<u>Nota</u> La composición de homeomorfismos es un homeomorfismo.

Y... AHORA YA ESTAMOS MÁS CERCA
DE ENTENDER LA CONJETURA DE POINCARÉ ...

Poincaré conjecture.
Every three-dimensional topological manifold which is closed, connected, and has trivial fundamental group is homeomorphic to the three-dimensional sphere.

On November 11, 2002, Russian mathematician Grigori Perelman posted the first of a series of three eprints on arXiv outlining a solution of the Poincaré conjecture. Perelman's proof uses a modified version of a Ricci flow program developed by Richard S. Hamilton. In August 2006, Perelman was awarded, but declined, the Fields Medal (worth $15,000 CAD) for his work on the Ricci flow.


Grigori Perelman

Ejercicio Sea $f : X \longrightarrow Y$ una biyección continua. Son equivalentes:

(I) f es un homeomorfismo

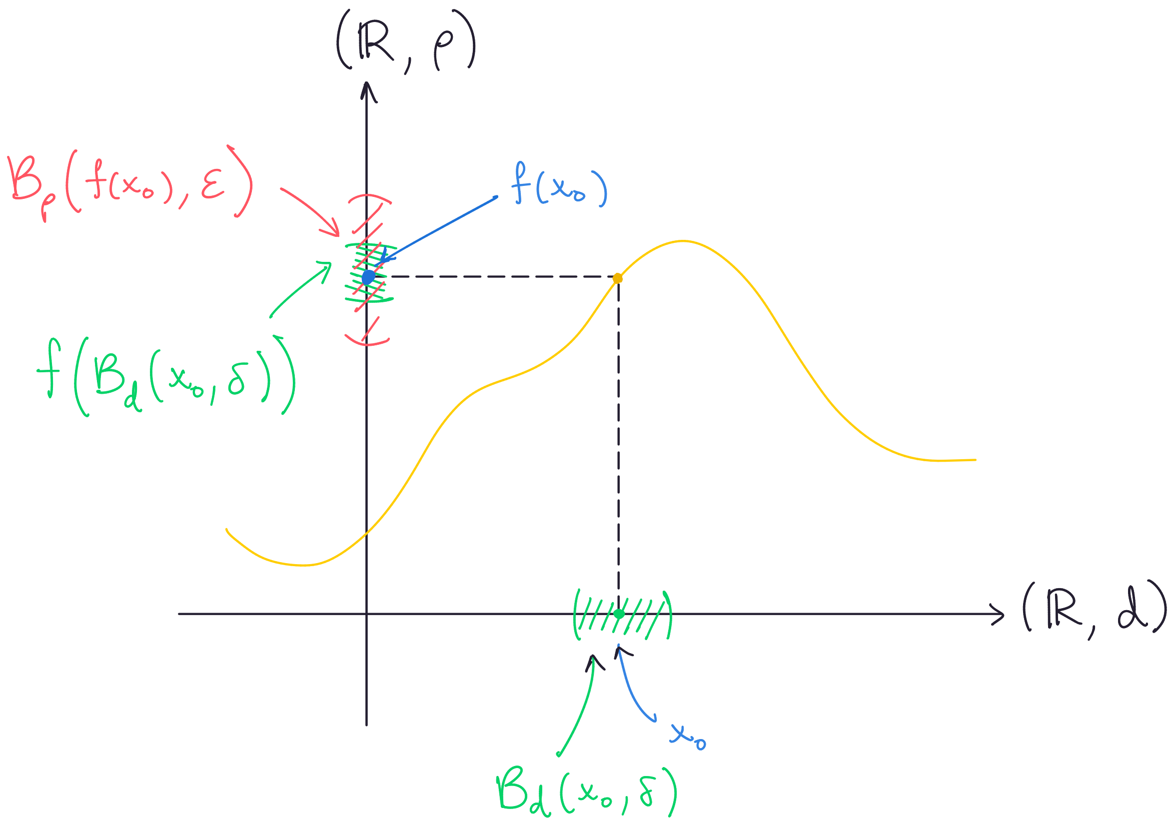
(II) f es abierta $\left[\forall \mathcal{O} \subseteq X \text{ ab} : f(\mathcal{O}) \text{ ab. en } Y\right]$

(III) f es cerrada $\left[\forall F \subseteq X \text{ cerr} : f(F) \text{ cerr. en } Y\right]$

4.3. FUNCIONES CONTINUAS ENTRE ESPACIOS MÉTRICOS

Definición. Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y sea una función $f: X \longrightarrow Y$. Diremos que f es continua en $x_0 \in X$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_\rho(f(x_0), \varepsilon).$$



Remark. Dado $A \subseteq X$, diremos que f es continua en A si y solo si f es continua en cada punto de A.

Veremos que: Sucesiones en X son suficientes para garantizar la continuidad de una función

$$f: (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$$

Def. Una secuencia en un conjunto X es una función $\underbrace{\mathbb{Z}^+ \longrightarrow X}_{x:\mathbb{Z}^+ \longrightarrow X}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} x : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow X \\ x_n = x(n) \\ \text{Se denota } (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \end{array}}$$

Convergencia Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sec. en X. Ella converge a un punto $x_0 \in X$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \quad n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

Teorema. Una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ es continua en un punto $x_0 \in X$ si y solamente si para toda sucesión $(x_n)_1^\infty$ t.q. $x_n \to x_0$, se tiene que $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

Prueba. $(\Rightarrow)$ Suponga que f es continua en $x_0 \in X$. Sea $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en X que converge a x_0. Como f es continua en x_0, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f\Big(B_d(x_0, \delta)\Big) \subseteq B_\rho\Big(f(x_0), \varepsilon\Big)$$

Para el δ hallado, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in B_d(x_0, \delta)$ para todo $n \geq N_0$. Entonces

$$f(x_n) \in B_\rho\big(f(x_0), \varepsilon\big) \qquad \forall n \geq N_0$$

lo cual significa que $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

$(\Leftarrow)$ Ejercicio.

$\boxed{\mathcal{Z}_2}$

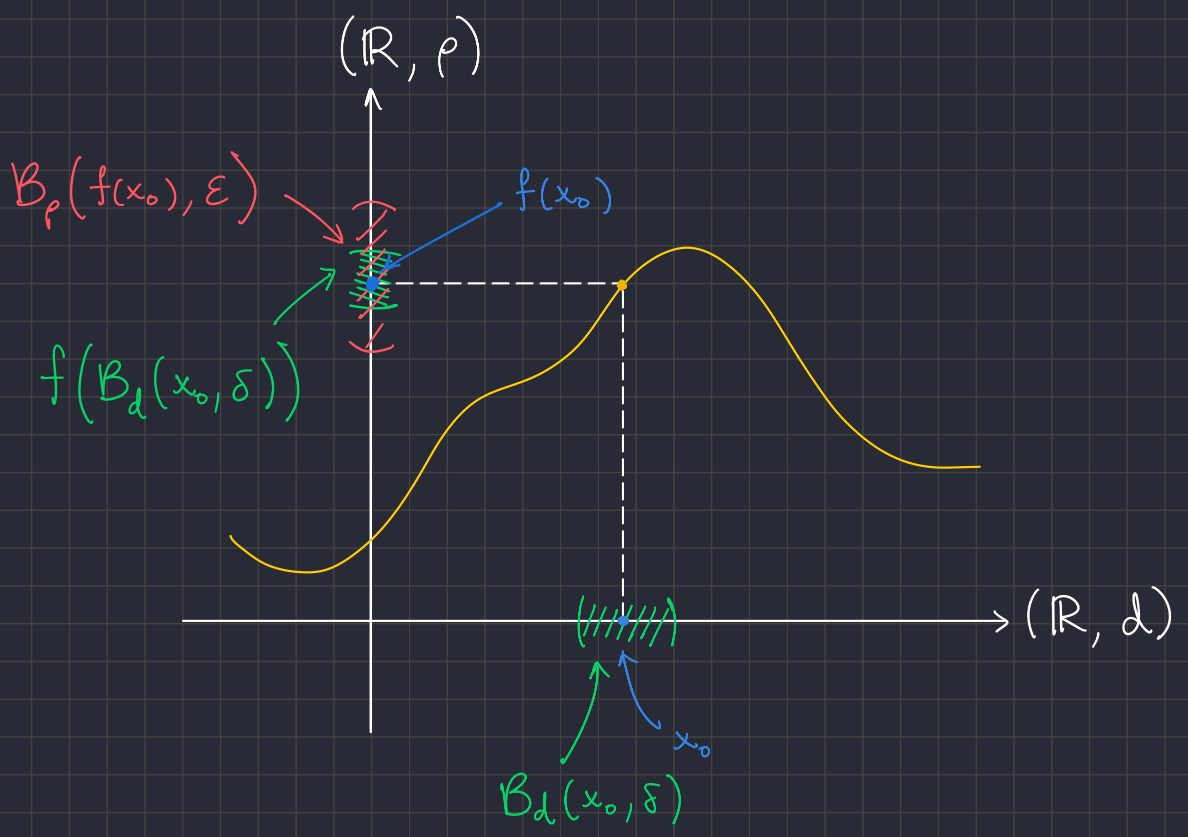
TOPOLOGÍA

Wednesday 18/01/2023

FUNCIONES CONTINUAS ENTRE ESPACIOS MÉTRICOS

Definición. Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y sea una función $f: X \longrightarrow Y$. Diremos que f es continua en $x_0 \in X$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_\rho(f(x_0), \varepsilon).$$



Remark. Dado $A \subseteq X$, diremos que f es continua en A si y solo si f es continua en cada punto de A.

Veremos que: Sucesiones en X son suficientes para garantizar la continuidad de una función

$$f: (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$$

Def. Una secuencia en un conjunto X es una función $\mathbb{Z}^+ \longrightarrow X$.

<u>Def</u> Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sec. en X.
Ella converge a un punto $x_0 \in X$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \quad n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

Teorema 1. Una función $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ es continua en un punto $x_0 \in X$ si y solamente si para toda sucesión $(x_n)_1^\infty$ t.q. $x_n \to x_0$, se tiene que $f(x_n) \to f(x_0)$.

Prueba. $(\Rightarrow)$ Suponga que f es continua en $x_0 \in X$. Sea $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en X que converge a x_0. Como f es continua en x_0, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f\left(B_d(x_0,\delta)\right) \subseteq B_\rho\left(f(x_0),\varepsilon\right)$$

Para el δ hallado, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in B_d(x_0,\delta)$ para todo $n \geq N_0$. Entonces

$$f(x_n) \in B_\rho(f(x_0),\varepsilon) \qquad \forall n \geq N_0$$

lo cual significa que $f(x_n) \to f(x_0)$.

$(\Leftarrow)$ Ejercicio. Suponga que si $(x_n)_1^\infty \subseteq X$ converge a x_0, entonces $f(x_n) \to f(x_0)$. Queremos demostrar que f es continua. Suponga, f.s.c., que f no es continua en x_0. Entonces $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0$ t.q.

$$f\left(B_d(x_0,\delta)\right) \nsubseteq B_\rho\left(f(x_0),\varepsilon\right).$$

i.e., existe $x \in B_d(x_0,\delta)$ s.t. $f(x) \notin B_\rho(f(x_0),\varepsilon)$.

Suppose that for all sequences $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ tending to p_0, the sequence $\{f(p_n)\}_{n=0}^\infty$ tends to $f(p_0)$. By way of contradiction, assume that f is discontinuous at p_0.

Then there exists $\epsilon > 0$ such that for all $\delta > 0$ there exists $p \in E$ such that $d(p,p_0) < \delta$ but $d'(f(p),f(p_0)) \geq \epsilon$. Let ϵ be as such and for each $\delta_n = 1/n$, find $p_n \in E$ such that $d(p_n,p_0) < \delta_n = 1/n$ but $d'(f(p_n),f(p_0)) \geq \epsilon$. Then, by definition of the limit, $p_n \to p_0$ but $f(p_n) \nrightarrow f(p_0)$.

Teorema 2. Sea $f: X \to Y$. Son equivalentes

(I) f es continua sobre X

(II) Para cualquier abierto $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

(III) Para cualquier cerrado $F \subseteq Y$, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Prueba. (I) $\Longrightarrow$ (II) Suponga que f es continua sobre X. Sea $V \in \mathcal{T}_Y$ abierto. Sea $x_0 \in f^{-1}(V)$. Tenemos que

$$f(x_0) \in V.$$

Dado que V es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V.$$

Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$$

Luego,

$$B_d(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\rho(f(x_0), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

Entonces, para cada $x \in V$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$$

Esto muestra que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ para cualquier $V \in \mathcal{T}_Y$.

(II) $\Rightarrow$ (III) Ejercicio.

(III) $\Rightarrow$ (I) Ejercicio.

Teorema 3. Sea

$$\mathcal{C}(X,Y) = \{\varphi : X \to Y \mid \varphi \text{ es continua sobre } X\}.$$

Entonces $\mathcal{C}(X,Y)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(I) $f, g \in \mathcal{C}(X,Y) \Rightarrow f+g \in \mathcal{C}(X,Y)$

(II) $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(X,Y) \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{C}(X,Y)$

Más aún, si

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

son continuas, entonces $g \circ f$ es continua sobre X.

Definición. Una función $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ es Lipschitz si existe una constante $L > 0$ tal que

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq L\, d(x,y) \qquad \forall x,y \in X.$$

Teorema 4. Si una función es Lipschitz, entonces es continua.

Remark. La conversa del Teorema 4 no es verdad. No cualquier función continua es Lipschitz. Por ejemplo, $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ es continua pero no Lipschitz.

•) Si ponemos $L \geq 0$ en la definición, incluimos la posibilidad de que una función continua sea Lipschitz.

Ejemplos.

1). Sea $f : X \to [0, +\infty)$, sea $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, y sea $a \in X$. Defina

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{dist}(x, A) \geq 0 \\ &= \inf\{d(x,a) : a \in A\} \end{aligned}$$

Esta función es Lipschitz.

Veamos que existe $L>0$, tal que

$$|f(x)-f(y)| \leq L\, d(x,y).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf\{d(x,a) : a\in A\} \\ &\leq \inf_{a\in A}\{d(x,y)+d(y,a)\} \\ &= d(x,y) + \inf_{a\in A} d(y,a) \\ &= d(x,y) + \operatorname{dist}(y,A) \\ &= d(x,y) + f(y) \end{aligned}$$

Esto es, $f(x)-f(y) \leq d(x,y)$. De manera similar se llega a que $f(y)-f(x) \leq d(x,y)$. Entonces,

$$f(x)-f(y) \leq d(x,y) \quad \text{y}$$
$$-d(x,y) \leq f(x)-f(y).$$

Por lo tanto, $\quad -d(x,y) \leq f(x)-f(y) \leq d(x,y)$

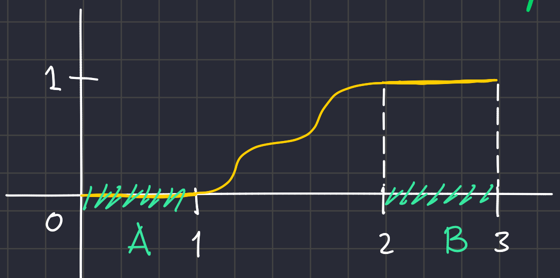
i.e., $\quad |f(x)-f(y)| \leq d(x,y).$

Tome $L=1$. Se concluye que f es Lipschitz.

Corolario 1. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $A,B\subseteq X$ disjuntos y cerrados. Existe una función continua $f : X\to[0,1]$ tal que $f^{-1}(\{0\})=A$ y $f^{-1}(\{1\})=B$.

Prueba. Basta definir $f: X\to[0,1]$ por

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} \qquad \forall x\in X.$$



$x\in A \Rightarrow d(x,A)=0 \Rightarrow f(x)=0$

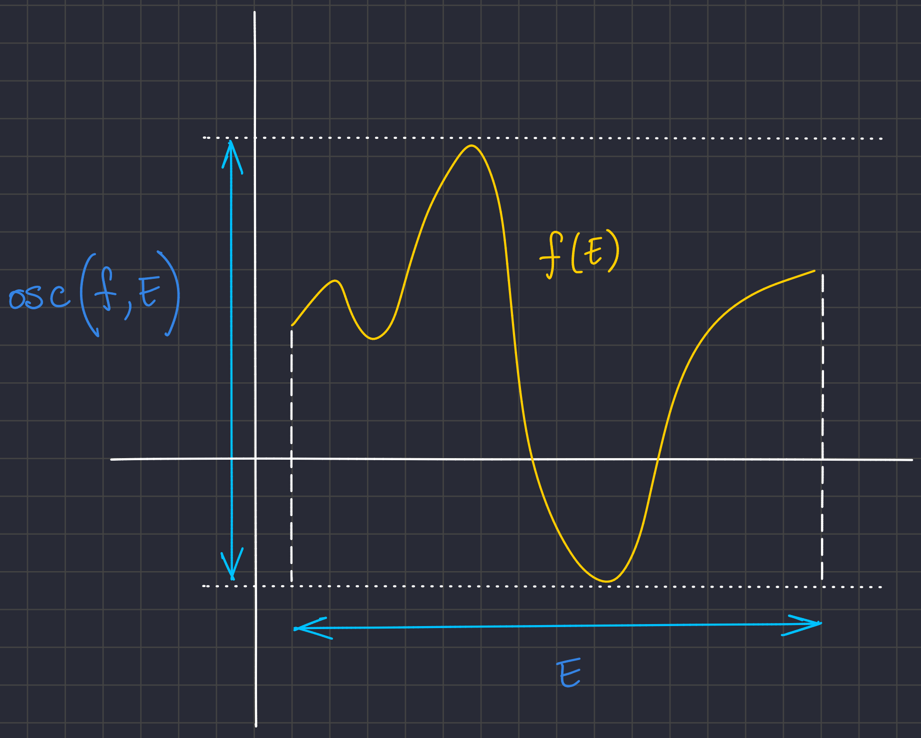
$x\in B \Rightarrow d(x,B)=0 \Rightarrow f(x)=1.$

Teorema 5. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces el conjunto de todos los puntos de continuidad de f es un G_δ.

Prueba. Se deja para la próxima clase.

Definición. Sea $f: X\to\mathbb{R}$ y $E\subseteq X$. La oscilación de f se define como

$$\operatorname{osc}(f,E)=\operatorname{diam} f(E)=\sup_{x\in E} f(x)-\inf_{x\in E} f(x)$$



Revisar la Paradoja de
BANACH-TARSKI
(es un teorema) (tiene que
ver con conjuntos que
no son medibles)

5. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS

5.1. CONEXIDAD

Def. Un espacio topológico X es disconexo si

(I) existen $A, B \subseteq X$ abiertos $\neq \emptyset$

(II) $A \cap B = \emptyset$ (disjuntos)

(III) $X = A \cup B$ (cubren a X)

Def. Un espacio topológico es conexo si no es disconexo.

Obs $\emptyset$ es conexo.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Entonces X es conexo si y solo si los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.

Prueba. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es conexo. Sea $A \subseteq X$ tal que

$$A \text{ es abierto y cerrado a la vez.}$$

Notemos que

$$X \setminus A \text{ es abierto y cerrado a la vez.}$$

Supongamos, para generar una contradicción, que

* Tanto A como $X \setminus A$ son distintos de $\emptyset$.
Entonces A y $X \setminus A$ son abiertos no vacíos, disjuntos que cubren a X.
Esto implica que X es disconexo. Contradicción.
Por tanto, este caso no puede pasar.

Entonces

$$A = \emptyset \quad \text{o} \quad X \setminus A = \emptyset$$

$$\iff A = \emptyset \quad \text{o} \quad A = X.$$

($\Leftarrow$) Lo hacemos por contrapositiva. Supongamos que X es disconexo.
Por definición, podemos escribir $X = A \cup B$ donde

A y B son abiertos, disjuntos y no vacíos.

Nota A abierto $\iff X \setminus A$ cerrado

$\iff (A \cup B) \setminus A$ cerrado

$\iff (A \setminus A) \cup (B \setminus A)$ cerrado

$\iff \emptyset \cup B \setminus A$ cerrado

$\iff B$ cerrado.

Similarmente

B abierto $\iff A$ cerrado

Hemos encontrado dos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez y ninguno es $\emptyset$ o X.

Fin de la prueba. $\boxed{\text{ƺ}}$

Ejemplos. (I) $\mathbb{R}$ es conexo

(II) El espacio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ es disconexo.
Encuentra una disconexión.

(III) $[0,1)\cup(2,3]$ es disconexo

(IV) $\mathbb{R}^n$ es conexo $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

(V) $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ es conexo.

IMPORTANTE

Un subconjunto de un espacio top. es conexo si tomado con la topología inducida, él es un espacio conexo.

Los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son conexos son los intervalos

Ejercicio. (Quiz) Supón $X\neq\emptyset$ es un espacio conexo.

Prueba que si $\varphi: X\longrightarrow\{0,1\}$ es continua, entonces φ es constante.

$\boxed{\text{Nota}}$ Aquí, $\{0,1\}$ tómalo con la topología discreta.

Componentes conexas

Def. Una componente conexa de un espacio X es un subconjunto conexo de X que no está propiamente contenido en otro subconjunto conexo de X.

ALGUNAS PROPIEDADES

Sean $A, B \subseteq X$, X esp. top.

(I) A conexo $\Rightarrow$ $\overline{A}$ conexo

(II) A, B conexos y $A \cap B \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $A \cup B$ conexo

(III) Todo subconjunto conexo está contenido en una componente conexa de X

(IV) Dos componentes conexas o son iguales o son disjuntas.

(V) La colección de las componentes conexas de un espacio forma una partición del espacio.

Nota: Un espacio es totalmente disconexo si todas sus componentes conexas son singletons.

¿Por qué un espacio discreto es totalmente disconexo?

IMPORTANTE!

Ejercicio: Si $f: X \longrightarrow Y$ es continua y X es conexo, $f(X)$ también es conexo.

Theorem 4.5.1 (Intermediate Value Theorem). *Let* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *be continuous. If* L *is a real number satisfying* $f(a) < L < f(b)$ *or* $f(a) > L > f(b)$*, then there exists a point* $c \in (a,b)$ *where* $f(c) = L$*.*

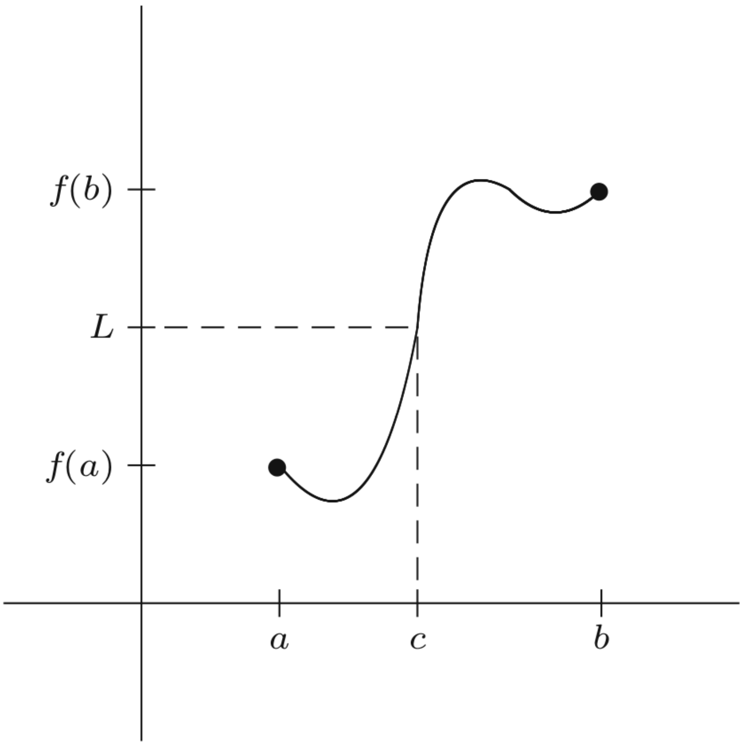


Figure 4.8: Intermediate Value Theorem.

5.2. CONEXIDAD POR CAMINOS

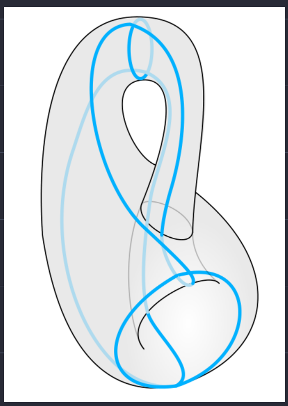
Def. Un camino en un espacio topológico X es una función continua de $[0,1]$ a X.

Sea $\alpha: I \longrightarrow X$ un camino en X.

- $\alpha(0)$ se llama punto inicial del camino
- $\alpha(1)$ se llama punto final del camino
- si $\alpha(0) = \alpha(1)$, decimos que α es un lazo en X

Un lazo es un camino que empieza y termina en el mismo punto

KLEIN BOTTLE



Ejemplo En $\mathbb{R}^2$, la función $\varphi: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ def por

$$t \longmapsto \left(\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t)\right)$$

es un camino.

(Es el círculo unitario)

Def. Un espacio topológico X es conexo por caminos si todo par de puntos $p,q \in X$ se pueden conectar por un camino.

$$\forall p,q \in X,\ \exists\, \alpha: I \to X \ :\ \alpha(0) = p,\ \alpha(1) = q$$

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\operatorname{Im}\alpha = \alpha(I) \qquad \text{CURVA}$$

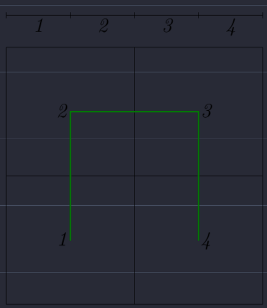


Fig. 1.

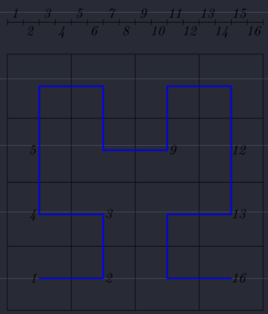


Fig. 2.

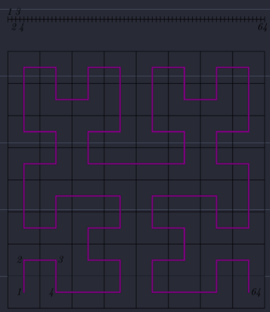
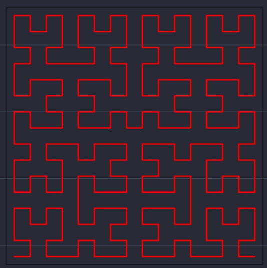
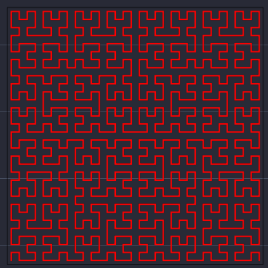
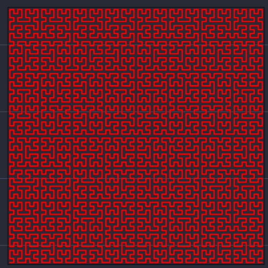


Fig. 3.







(https://youtu.be/x-DgL49CFIM)

CONX. CAM $\Rightarrow$ CONEX

Teorema. Si un espacio topológico es conexo por caminos, entonces el espacio es conexo.

Prueba. Supón que X es conexo por caminos.
Fija un punto $p \in X$.
Considera todos los caminos en X que empiezan en p. Sabemos que ellos son conexos (por el teorema principal de conexidad).
La intersección de estos caminos contiene a p.
Por tanto, la unión de ellos es conexo.
Además, tal unión cubre a X.
Se sigue que X es conexo.

Ejercicio Proporciona más detalles en esta demostración.

Ejemplo $\mathbb{R}^n$ es conexo por caminos $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

(II) En particular, $\mathbb{R}$ es conexo por caminos

(III) La esfera S^n es conexo por caminos

(IV) En $\mathbb{R}^n$, todo conjunto convexo es conexo.

CONVEXO $\Rightarrow$ CONEXO

Teorema Si $f: X \longrightarrow Y$ es continua y X es conexo por caminos, entonces $f(X)$ también.

Prueba. Se deja al lector. $\boxed{z}$

5.3. AXIOMAS DE NUMERABILIDAD

Sea X un esp. top. y $p \in X$.

sistema fundamental

* Una base de entornos en p es una colección $\mathcal{B}_p$ de entornos de p t.q.

$$\forall U \in N(p),\ \exists B \in \mathcal{B}_p : \quad B \subseteq U$$

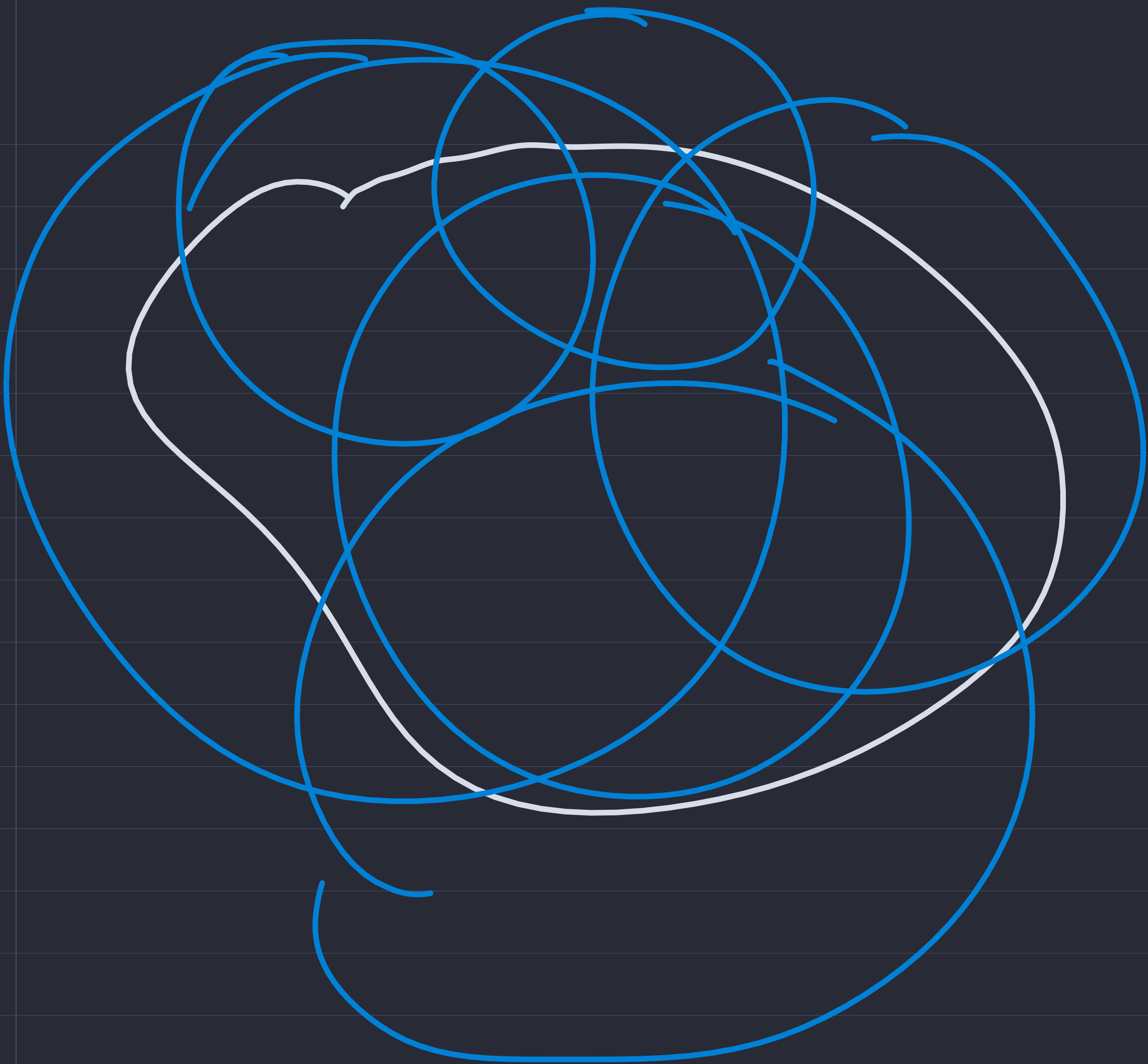
Def. Un espacio X es ANI (satisface el primer axioma de numerabilidad) si

$$\forall p \in X,\ \exists \mathcal{B}_p : \mathcal{B}_p \text{ es una base de entornos.}$$

Def. Un espacio es ANII (segundo contable, ó satisface el segundo axioma de numerabilidad) si tiene una base contable para su topología.

Def. Un espacio es separable si contiene un subconjunto denso numerable.

Def. Un espacio es de Lindelöf si todo cubrimiento abierto del espacio tiene un subcubrimiento contable.



$$X \subseteq \bigcup\nolimits_{\mathrm{nion}}$$

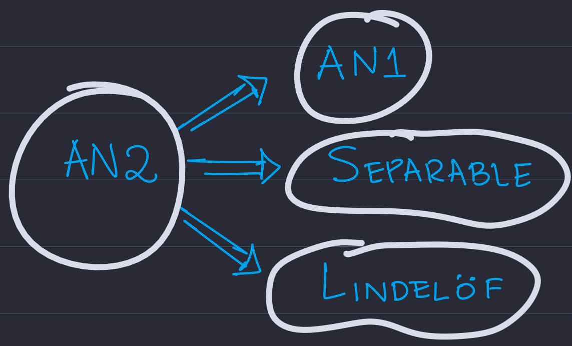
PROPIEDADES

(I) Todo espacio métrico es AN1

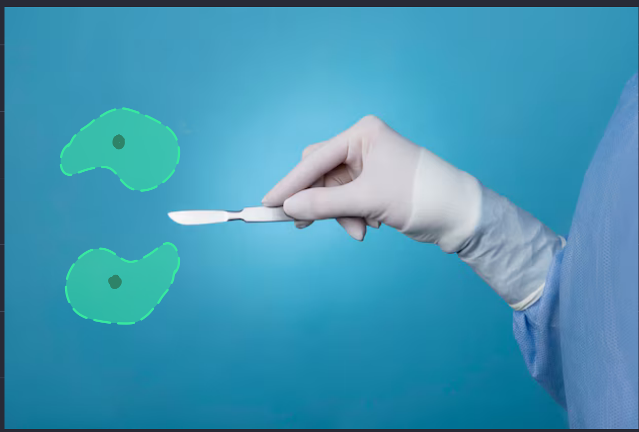
(II) Para espacios métricos:

AN2 $\iff$ SEPARABLE $\iff$ LINDELÖF

(III) Para cualquier espacio,



5.3. AXIOMAS DE SEPARACIÓN



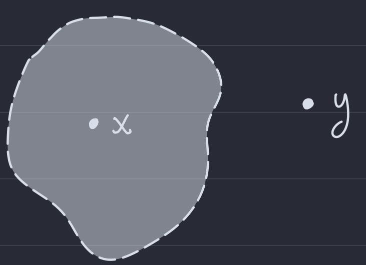
Sea X un espacio topológico.

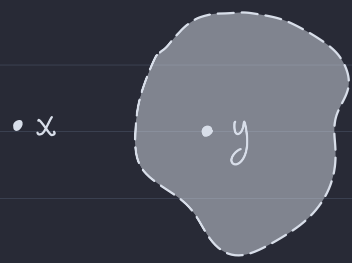
T_0 (Kolmogorov)

- X satisface el axioma T_0 si

  $\forall x, y \in X$ distintos, $\exists\, \mathcal{O} \subseteq X$ abierto:

  $$(x \in \mathcal{O} \ \wedge \ y \notin \mathcal{O}) \ \text{o} \ (x \notin \mathcal{O} \ \wedge \ y \in \mathcal{O})$$





T_1 (Fréchet)

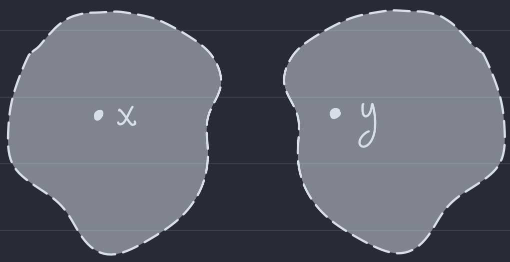
X es T_1 si

$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists U \in \mathcal{N}(y):\ \underline{x \notin U}$

T_2 (Hausdorff)

X es Hausdorff si

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists U \in \mathcal{N}(x),\ \exists V \in \mathcal{N}(y) : U \cap V = \emptyset$$



$\boxed{\text{Fact (Muy importante) TODO ESPACIO MÉTRICO ES HAUSDORFF}}$

"...accept my apology on behalf
of the mathematicians of the 20th century...
I am doing what I think is right ..."

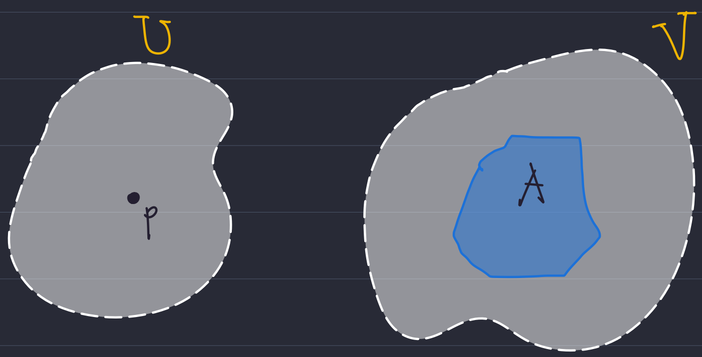
Regularidad & T_3

Def. X es regular si

$\forall x \in X, \ \forall A \subseteq X$ cerrado, $x \notin A$,

$\exists U, V \subseteq X$ abiertos t.q. $U \cap V = \emptyset$:

$x \in U, \quad A \subseteq V$



En pocas palabras: podemos separar puntos de conjuntos cerrados

Def. X es T_3 si

(I) X es T_1

(II) X es regular

Normalidad & T_4

Def. X es normal si

$\forall A, B \subseteq X$ cerrados, $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$

$\exists U, V \subseteq X$ abiertos, $U \cap V = \emptyset$:

$A \subseteq U$, $B \subseteq V$

Def. X es T_4 si

(I) X es T_1

(II) X es normal

EN RETROSPECTIVA ...

$$\left(T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 \right)$$

Hausdorff

5.4. COMPACIDAD

Def. Sea X un conjunto. Un cubrimiento de X es una coleccion $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ t.q.

$$X \subseteq \bigcup \mathcal{C}.$$

Si existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ t.q. $X \subseteq \bigcup \mathcal{C}'$, decimos que

$\mathcal{C}'$ es un subcubrimiento de $\mathcal{C}$.

Def Sea X un espacio topológico y $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ un cubrimiento de X.
Decimos que

$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ es un cubrimiento abierto

si

A_α es abierto $\forall \alpha \in I$.

Def (Compacidad) Sea X un espacio topológico.

X es compacto si todo cubrimiento abierto de X tiene subcubrimiento finito.

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \underset{\substack{\exists J \subseteq I \\ J \text{ finito}}}{\Longrightarrow} \quad X \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

A_α : abierto

Def. Un subconjunto A de un espacio X es compacto si A dotado de la topología inducida es compacto.

Ejemplos

(I) Todo espacio finito es compacto, no importa qué topología se considere.

(II) Todo espacio con la topología trivial es compacto.

(III) Un subconjunto de un espacio discreto es compacto si es finito.

Teorema Principal Sobre Compacidad.

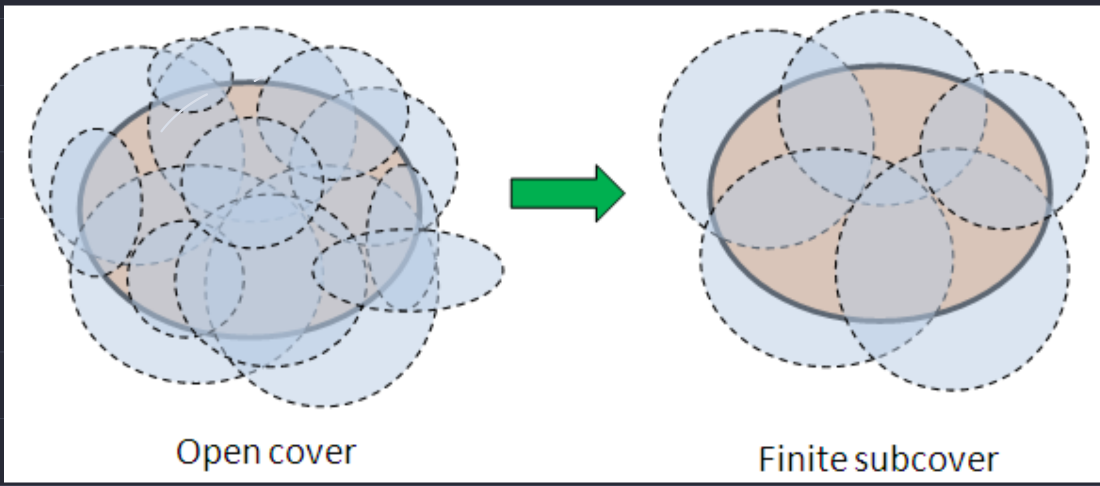
Considera espacios topológicos X, Y, con X compacto
Sea $f: X \to Y$ continua.
Entonces

$$f(X) \text{ es compacto}$$

Demostración Ejercicio.

Corolario. Si un espacio es homeomorfo a un compacto, entonces también es compacto.

COMPACTNESS



Propiedades Sea X un espacio topológico.

(I) Si X es compacto,

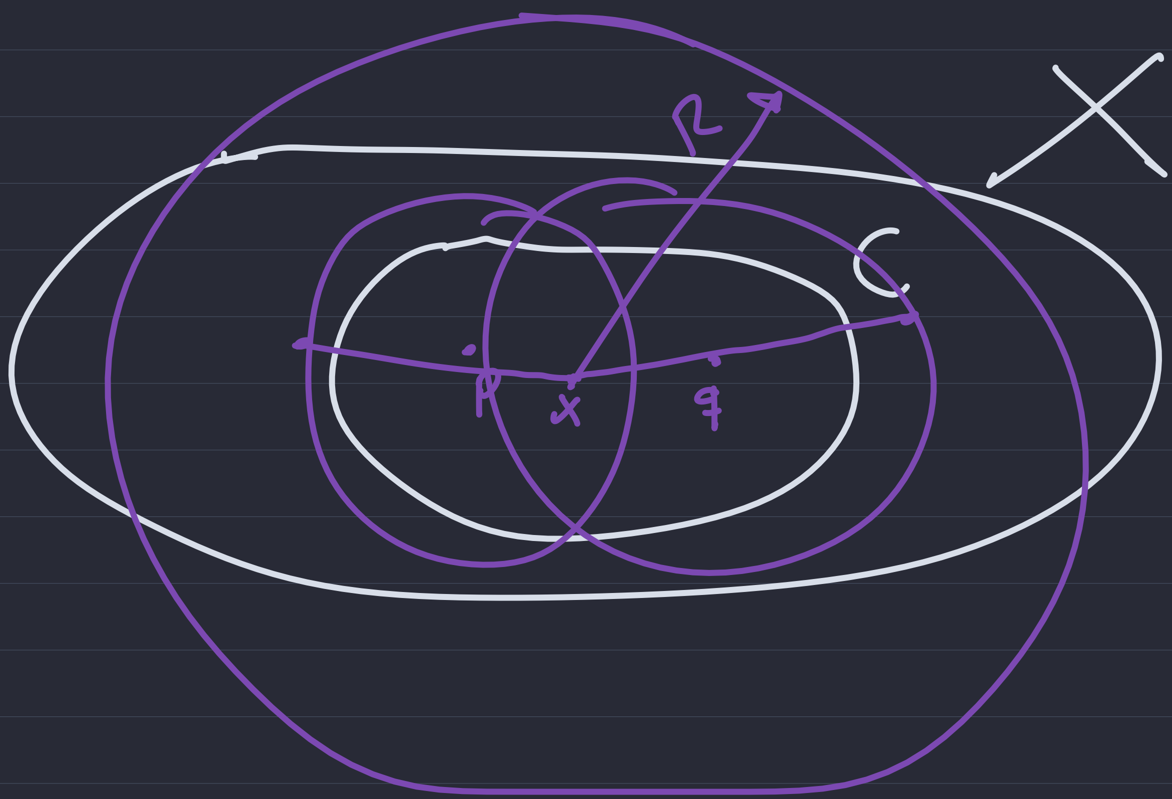
$C \subseteq X$ cerrado $\Rightarrow$ C compacto

(II) Si X es Hausdorff,

$C \subseteq X$ compacto $\Rightarrow$ C cerrado

(III) Si X es un espacio métrico,

$C \subseteq X$ compacto $\Rightarrow$ C acotado



6. CONSTRUCCIONES TOPOLÓGICAS

6.0. PRELIMINARES

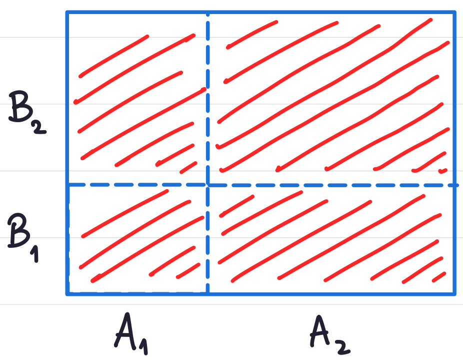
Producto cartesiano

Sean X y Y dos conjuntos. Definimos su producto cartesiano como

$$X \times Y := \{ (x, y) \mid x \in X, \quad y \in Y \}$$

Propiedades. Sean $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$

(I) $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$



(II) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

Pregunta ¿Qué es el producto cartesiano de n conjuntos? ¿Y el de una cantidad arbitraria?

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{ \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)} \mid x_i \in X_i \}$$

$(x_i)_{i=1}^{n}$ $\quad (x_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$

$(X_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ $\quad \Delta$ arb.

$$\prod_{\lambda \in \Delta} X_\lambda = \{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Delta} \mid x_\lambda \in X_\lambda \}$$

Proyecciones canónicas

Definamos

$$\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X \qquad\qquad \pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$$
$$(x, y) \longmapsto x \qquad\qquad\qquad (x, y) \longmapsto y$$

π_1 se llama proyección canónica en el primer factor.

π_2 se llama proyección canónica en el segundo factor.

<u>Nota</u> Es posible que se use otra notación (como pr) en vez de π.

<u>Ejercicio</u> Sea $A \subseteq X$. Muestra que $\pi_1^{-1}(A) = A \times Y$.

"La proyección canónica en la p.c. nos permite 'pegarle' el A a la Y".

Encuentra una fórmula análoga para un $B \subseteq Y$.

6.1. ESPACIO PRODUCTO

Sean X, Y espacios topológicos.

- Un abierto elemental de $X \times Y$ es un conjunto de la forma
$$A \times B$$
donde $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ son abiertos.

<u>Proposición</u> Sea
$$\mathcal{B} = \{ A \times B \mid A \times B \text{ es un abierto elemental} \}$$
Entonces
$$\mathcal{B} \text{ es una base para una única topología en } X \times Y.$$

<u>Demostración.</u> Que $\mathcal{B}$ cubre a $X \times Y$ es claro (¿por qué?).
Veamos que
$$\forall\, A \times B,\ A' \times B' \in \mathcal{B},\ \exists\, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} : (A \times B) \cap (A' \times B') = \bigcup \mathcal{B}'$$

Fijemos $A \times B$, $A' \times B' \in \mathcal{B}$ y notemos que
$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

Como $A \cap A'$ es abierto (en X) y $B \cap B'$ es abierto (en Y) se sigue que
$$(A \cap A') \times (B \cap B') \in \mathcal{B}.$$

(Entonces tomas $\mathcal{B}' =$ ______) Fin de la demostración. $\boxed{\xi}$
(por el criterio de base)

Definición. La topología producto en $X \times Y$ es la topología generada por la base

$$\mathcal{B} = \left\{ A \times B \;\middle|\; \begin{array}{l} A \subseteq X \text{ abierto,} \\ B \subseteq Y \text{ abierto} \end{array} \right\}$$

El par $(X \times Y, \mathcal{J}_{\mathcal{B}})$ se llama espacio producto.

Ejercicio (I) Muestra que $X \times Y \cong Y \times X$ usando un homeomorfismo canónico.

(II) Muestra que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ para todo $A \subseteq X$ y todo $B \subseteq Y$.

PROPIEDADES (de la topología producto)

(I) Las proyecciones canónicas $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$, $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son continuas.
Además, la topología producto es la top. más gruesa para la cual esto es verdad.

(II) El producto de espacios que son

Hausdorff / separables / conexos / compactos / conexos por caminos

también tiene esa propiedad.

6.1. ESPACIO COCIENTE

Definition. A *topology* on a set X is a collection $\mathcal{T}$ of subsets of X having the following properties:

(1) $\varnothing$ and X are in $\mathcal{T}$.

(2) The union of the elements of any subcollection of $\mathcal{T}$ is in $\mathcal{T}$.

(3) The intersection of the elements of any finite subcollection of $\mathcal{T}$ is in $\mathcal{T}$.

Here they come ...

Def. Una relación de equivalencia sobre un conjunto A es un subconjunto $\sim \subseteq A \times A$ t.q.

(I) [Reflexividad] $\forall a \in A: (a,a) \in \sim$

(II) [Simetría] $\forall a,b \in A: (a,b) \in \sim \Rightarrow (b,a) \in \sim$

(III) [Transitividad] $\forall a,b,c \in A: (a,b) \in \sim \wedge (b,c) \in \sim$
$$\Downarrow$$
$$(a,c) \in \sim$$

Nota En vez de escribir $(a,b) \in \sim$, escribimos $a \sim b$

Conceptos * Una relación de equivalencia parte un conjunto en piezas totalmente distintas.

* Sea $\sim$ una R.E. sobre un conjunto X. Sea $x \in X$. La clase de equivalencia de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x] := \{ y \in X \mid y \sim x \}$$

* Todo elemento pertenece a una clase de equivalencia. Además

$$\forall x, x' \in X : \quad x \sim x' \iff [x] \cap [x'] \neq \emptyset \iff [x] = [x']$$

* $\sim$ genera una partición de X, es el conjunto formado por todas las clases de equivalencia, i.e. $\underbrace{\{ [x] \mid x \in X \}}_{\text{conj. cociente.}}$.

* Observa que $X = \bigcup_{x \in X} [x]$

R.E $\Rightarrow$ PARTICIÓN

El conjunto cociente de X por $\sim$ se denota $X/\sim$.

<u>Pregunta</u> ¿Cómo se relaciona un conjunto con su conjunto cociente?

<u>Def.</u> La proyección canónica de X en $X/\sim$ es la función

$$\pi : X \longrightarrow X/\sim$$
$$x \longmapsto [x]$$

Observe que π es sobreyectiva.

$\pi(a) = [a]$

La topología cociente

Def. Sea $(X, \mathcal{J})$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. La colección

$$Q = \{ A \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(A) \in \mathcal{J} \}$$

es una topología en $X/\sim$, llamada topología cociente.

El par $(X/\sim, Q)$ se llama espacio cociente.

Nota Por construcción, π es continua.

Nota La topología cociente es la topología más fina en $X/\sim$ tal que π es continua

PROPIEDADES Sea X un espacio topológico.

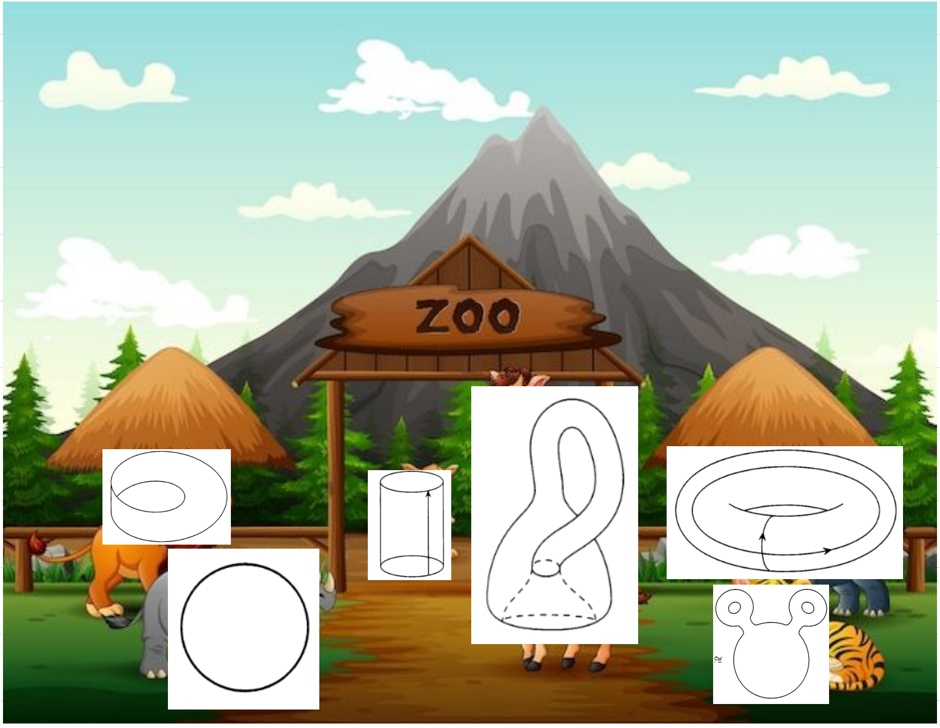
(1) Si X es

conexo / conexo por caminos / separable / compacto

entonces

$X/\sim$ también.

BIENVENIDOS AL ZOOLÓGICO DE ESPACIOS COCIENTES

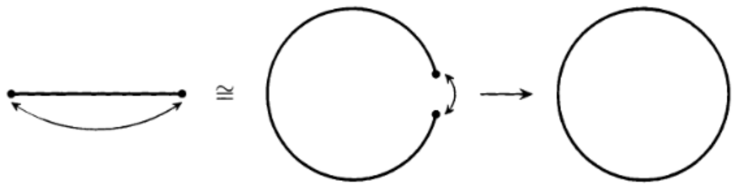


Anatolii Fomenko, Mathematical Impresions

El círculo

$I = [0,1]$

$I/[0 \sim 1] \cong S^1$

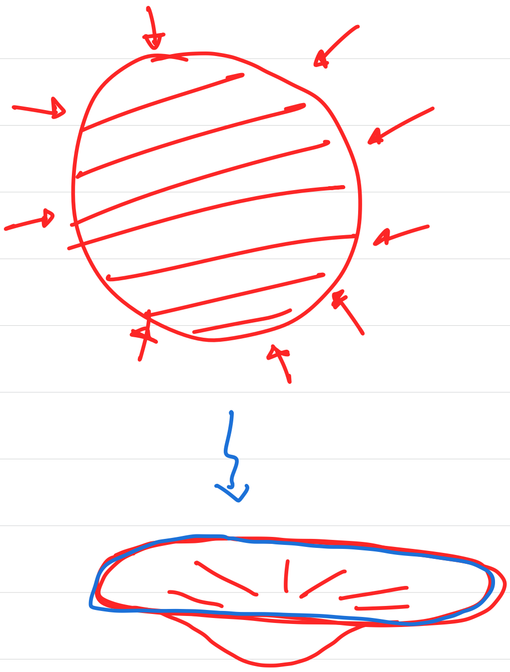


- ¿Cuál es la partición considerada?

Nota En general, $D^n / S^{n-1} \cong S^n$

"contraer el borde del disco n-dimensional a un punto, nos da la esfera"

$n=2$

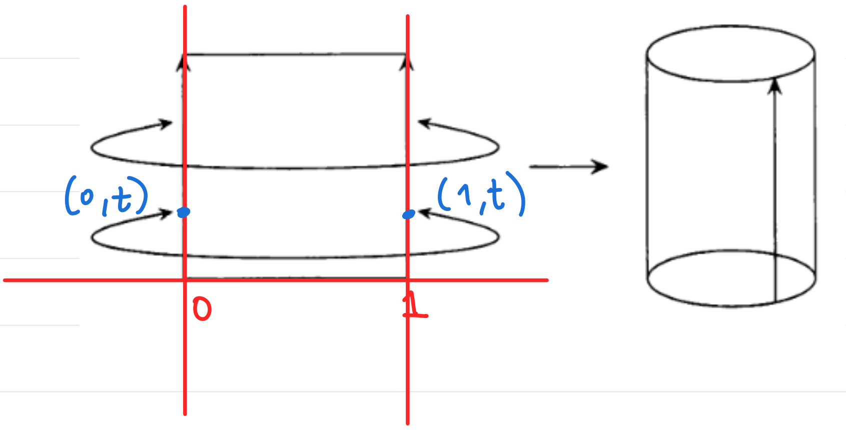


slime

balón (esfera)

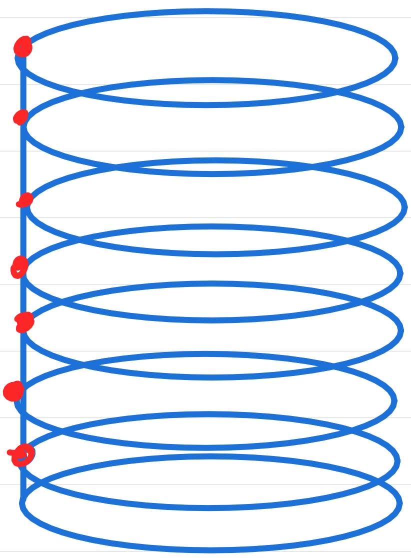
El Cilindro

$$I^2/[(0,t)\sim(1,t)] \cong S^1\times I$$



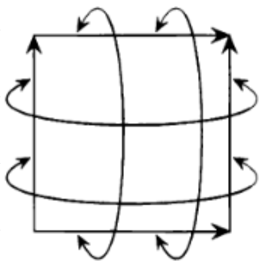
· ¿Cuál es la partición considerada?

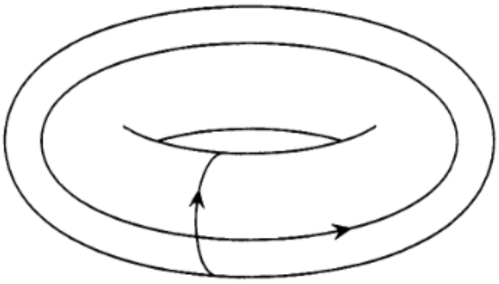
$$S^1\times I$$



El Toro

$$I^2 / [(0,t) \sim (1,t),\ (t,0) \sim (t,1)] \cong S^1 \times S^1$$

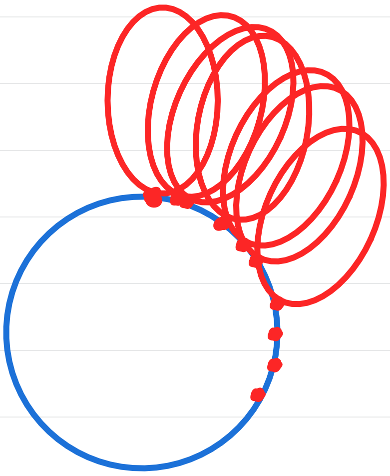




Ejercicio Describe la partición (TAREA)

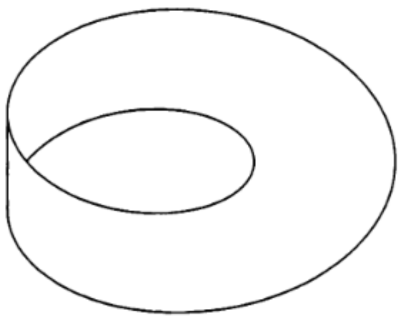
Pregunta ¿Por qué el toro es el producto de dos círculos?

$S^1 \times S^1$



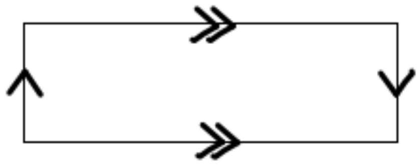
La Banda de Möbius

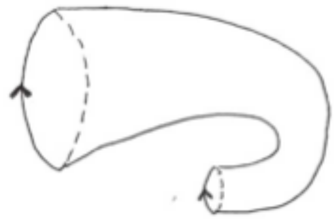
Se define como $I^2 / [(0,t) \sim (1,1-t)]$

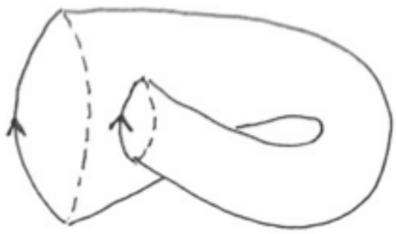


La Botella de Klein

<u>Def.</u> $I^2 / [(t,0) \sim (t,1),\ (0,t) \sim (1,1-t)]$







GRACIAS POR PARTICIPAR EN EL CLUB DE MATE YT

NOS VEMOS!