2025-09-02 Algebre C. & Géométrie Algébrique
MAT729

Téorie geom de representation. ← Interet, mais non principale.

Devoirs avec systéme de décorrection.

Correction pour paires c'est pour donner de commentaires (15%)

INTRODUCCION

① En comparaison avec d'autres types de géometrie pour faire de la géomatrie, on étudie une classe d'espaces et de fonctions/morphismes entre eux.

Dans Topologie espaces topologiques + fonctions continues

Géométrie diff. variétés différentielles + fonctions différentiables.

[differentiable manifold]

Géométrie lisse variétés lisses + fonctions lisses

Géométrie algébrique variétés algébriques + fonctions régulières

Observation clé: Dans tous ces cas, l'ensemble des fonctions (cont, diff, lisse, reg)

$$\mathcal{O} = \{ f : X \to \mathbb{R} \}$$

forme un anneau commutatif. (parce que $\mathbb{R}$ est a.c.)

$$f+g : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad fg : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto f(p)+g(p) \qquad p \longmapsto f(p)g(p)$$

L'identité est la fonction constant 1.

- Les fonctions régulières sur X forment un anneau particulièrement "algébrique" par exemple un anneau de polynômes

$$\mathbb{R}[X] \quad , \quad \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3] \leftarrow$$ Ces types des anneaux (polynômes) sont très important

d'où l'importance de l'algèbre commutative.

Observation Soit R n'importe quel anneau commutatif. On étudie $\{f : R \longrightarrow R\}$ (par nec homomorphismes); on ne peut pas demander si f est ~~..~~ continue (pas de top sur R), diff ou lisse (pas de limites dans R)

MAIS on peut toujours demander si f est une fonction polynomiale.

$$\exists\, P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n \in R[X], \quad a_i \in R$$

$$\text{t.q. } f(r) = p(r) \quad \forall r \in R.$$

ET dans ce cas on peut définir formellement la derivée :

$$\frac{df}{dX} = n a_0 X^{n-1} + (n-1) a_1 X^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

IMPORTANT Les variétés algébriques existent sur n'importe quel anneau commutatif

! Dans ce cours on travaille principalement avec des corps $k = \bar{k}$ algébriquement fermés, tel que $k = \mathbb{C}$

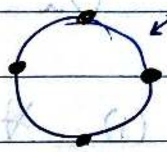
② En comparaison avec l'algèbre

À l'école : on résout des équations polynomiales

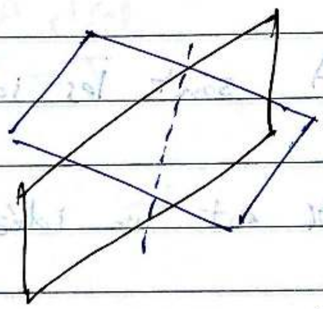
Ex:

$$aX^2 + bX + c = 0.$$

$$X^2 + y^2 = 1. \rightsquigarrow$$



Algèbre linéaire : on résout des systèmes d'équations linéaires:



variétés algébriques

Géométrie algébrique : on étudie les solutions des systèmes d'équations polynomiales

Exemple célèbre : La dernière théorème de Fermat.

L'équation $X^n + Y^n = Z^n$ n'a pas de solutions non-triviales dans $\mathbb{Z}^3$ si $n \geq 3$.

$\iff$ pas de sol. non-triviale dans $\mathbb{Q}^3$

$\iff$ $\underbrace{X^n + Y^n = 1}$ n'a aucune sol non-triviale. dans $\mathbb{Q}^2$

courbe dans $\mathbb{Q}^2$

algébrique

Hilroy

RAPPEL SUR LES IDÉAUX

• **Convention** : pour nous, tous les anneaux sont commutatifs avec 1.

Soit A un anneau

Déf. Un sous ensemble $\mathfrak{a} \subseteq A$ non-vide est un idéal si

(1) $\forall a, b \in \mathfrak{a} : a + b \in \mathfrak{a}$

(2) $\forall a \in A, b \in \mathfrak{a} : ab \in \mathfrak{a}$

Ex (i) $\{0\}$, A sont les idéaux triviaux

(ii) Si $\mathfrak{a}$ est un idéal, alors $\mathfrak{a} = A \iff 1 \in \mathfrak{a}$.

(iii) Si $A = k$ est un corps, les seuls idéaux sont $\{0\}, k$. (exercise)

Exemple clé : Soit X un espace topologique et soit $A = \mathcal{O}(X)$ l'anneau de fonctions continues sur X.

Soit $S \subseteq X$ un sous-ensemble. Alors

$$I(S) := \{ f \in A \mid \underbrace{f(s) = 0 \quad \forall s \in S}_{f|_S = 0} \} \text{ est un idéal}$$

Dem • $I(S) \neq \emptyset$ car la fonction cte $0 \in I(S)$.

• Si $f, g \in I(S)$ et $s \in S$: $(f+g)(s) = f(s) + g(s) = 0 + 0 = 0$. Alors $f + g \in I(S)$.

• Si $f \in \mathcal{O}(X)$, $g \in I(S)$, $s \in S$,

$$(fg)(s) = f(s)g(s) = f(s)0 = 0.$$

Alors $fg \in I(S)$. $\square$

Commentaire On peut comprendre les sous-ensembles S si on comprendre leur ideaux $I(S)$.

Exercise Soit $S \subseteq A$ un sous-ensemble. Soit I l'intersectio de tous les idéaux de A qui contienent S

$$I = \bigcap_{\substack{J \subseteq A \text{ idéal} \\ \text{t.q. } S \subseteq J}} J$$

Exercises • démontrer que I est un idéal

• démontrer que $I = \left\{ \sum_{t \in T} a_t s_t \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ fini} \\ a_t \in A \\ s_t \in S \end{array} \right\}$

• démontrer que I est le plus petit idéal de A qui contient S.

↳ Déf $I = \langle S \rangle = AS$

Si S est fini, $S = \{f_1, \dots, f_N\}$, alors $I = (f_1, \dots, f_N)$

Exercise reviser vos notes de théorie d'anneaux.

2025-09-05

Rappel A : anneau commutatif avec 1

$I \subseteq A$ est un idéal si

(i) $I \neq \emptyset$

(ii) $\forall a, b \in I$: $a+b \in I$

(iii) $\forall a \in A, \forall b \in I$: $ab \in I$

Notation : $\langle S \rangle = AS = (s_1, s_2, \dots)$ idéal engendré par S.

Convention : $\langle \emptyset \rangle = \langle \{0\} \rangle = \{0\}$.

Déf Un idéal engendré par un seul élément est un idéal principal.

Déf Un anneau dont ~~les~~ les idéaux sont tous principaux est un anneaux principal. ($\neq$ PID)

① **Exemple** Dans $\mathbb{Z}$, chaque idéal $I \subseteq \mathbb{Z}$ es de la forme

$$I = (n) = n\mathbb{Z} = \{ na \mid a \in \mathbb{Z} \}$$

où $n = \min\{ i \in I \mid i > 0 \}$ (excersise)

② $k[X] = \{ \text{polynômes } a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \}$

$\deg = n$ si $a_0 \neq 0$

Ici, chaque ideal $I \subseteq k[X]$ est égale à $I = (f(X))$ où $f(X)$ est un polynôme dans I de degré minimal.

③ ! $k[X, Y]$ n'est pas principal. Par exemple,

$I = (X, Y)$ ne peut pas être engendré par un seul élément.

Constructions d'idéaux

Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in A$ deux idéaux. On peut construire 3 nouveaux idéaux :

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \langle \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \rangle = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$$

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \langle \{ab \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\} \rangle$$

$$= \left\{ \sum_{t=1}^{n} a_t b_t \mid a_t \in \mathfrak{a}, b_t \in \mathfrak{b} \right\}$$

Exercise si $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathfrak{b} = (b_1, \dots, b_m)$ alors

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (a_i b_j)_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}}$$

Exercise (Autre façon de contruire idéaux) Soit $f : A \to B$

- hom. de anneaux. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal.
- Par contre, si $\mathfrak{a} \subseteq A$ est un idéal on obtient l'anneau quotient

$$A/\mathfrak{a} = \{r + \mathfrak{a} \mid r \in A\}$$

et $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$, $r \mapsto r + \mathfrak{a}$ est un hom. avec $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathfrak{a}$.

Prop ~~Il~~ Il y a une bijection

$$\left\{\begin{array}{c}\text{idéaux de} \\ A/\mathfrak{a}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{idéaux de } A \\ \text{contenant } \mathfrak{a}\end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{b} \subseteq A/\mathfrak{a} \longmapsto \pi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A.$$

Demo: exercice.

Déf Un idéal $\mathfrak{p} \subseteq A$ est premier si $\mathfrak{p} \neq A$ et

$\forall s, r \in A$: $sr \in \mathfrak{p} \implies$ soit $s \in \mathfrak{p}$, soit $r \in \mathfrak{p}$.

Déf Un élément $a \in A$ est premier si $a \neq 0$, $a \notin A^\times$ et

$\forall r, s \in A$ t.q $a | rs$, on a soit $a|r$, soit $a|s$.

Exemple $6\mathbb{Z}$ n'est pas premier ($6 | 2\cdot 3$ mais $6 \nmid 2$, $6 \nmid 3$)

Prop Soit $a \in A \setminus \{0\}$.

(a) est premier $\iff$ a est premier.

Demo: Exercice.

Déf Un idéal $\mathfrak{m} \subseteq A$ est maximal si

(I) $\mathfrak{m} \neq A$

(II) si $\mathfrak{a} \subseteq A$ est un idéal t.q. $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}$ soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$, soit $\mathfrak{a} = A$ $\iff$ $\nexists\, \mathfrak{a}$ t.q. $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq A$.

Proposition. (1) Un idéal $\mathfrak{p} \subseteq A$ est premier si

$A/\mathfrak{p}$ est intègre et pas $\{0\}$.

(2) Un idéal $\mathfrak{m} \subseteq A$ est maximal si et seulement si $A/\mathfrak{m}$ est un corp (non nul)

(3) maximal $\Longrightarrow$ premier

Demo: Exercise

//

On va commencer à faire des correspondances entre des objects algébriques et géométriques.

Algèbre	Géométrie
l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]$ (fonctions polynômes sur k^n)	l'espace k^n $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n)$
$I(S) = \{ f : f\|_S = 0 \}$ idéaux de $k[X_1, \dots, X_n]$ $\longleftrightarrow$	$S \subseteq k^n$ sous-ensemble. (points dans k^n, etc)

("On va remplir cett tableau")

Déf Soit $S \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$

- $V(S) := \{ p \in k^n \mid f(p) = 0 \quad \forall f \in S \}$

  "les zéros communs de tous les $f \in S$"
  [vanishing set/locus of S]

- Un sous-ensemble $V \subseteq k^n$ est un sous-ensemble algèbrique si $\exists S \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ t.q. $V = V(S)$

Remarque $S_1 \subseteq S_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n] \implies V(S_1) \supseteq V(S_2)$

plus d'équations ⇒ moins de solutions.

Exemple $V(\emptyset) = \{ p \in k^n \mid \dots \}$ ← aucune condition
$= k^n$.

Notation Quand on considère k^n comme ensemble algébrique, on écrit $\mathbb{A}^n$ ou $\mathbb{A}^n_k$ et on l'appelle l'espace affine (on oublie la structure de k^n, comme l'estructure de esp. vectoriel)

Exemple $V(k[X_1, \dots, X_n]) = \{ p \mid f(p) = 0,\ \forall f \in k[X_1, \dots, X_n] \}$
$= \emptyset$ (considerons $f = 1$, cte)

Proposition Soit $S \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ un sous-ensemble et

$$\mathfrak{a} = \langle S \rangle. \text{ Alors } V(\mathfrak{a}) = V(S)$$

Démo : $\mathfrak{a} = \left\{ \sum_{t \in T} a_t s_t \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ fini} \\ a_t \in k[X_1, \dots, X_n],\ s_t \in S \end{array} \right\}$

En particulier $S \subseteq \mathfrak{a}$ et donc $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(S)$
Alors, soit $p \in V(S)$ v.m.q $f(p) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{a}$.

Écrivons $f = \sum_{t \in T} a_t s_t$ avec $s_t \in S$.

$$\implies f(p) = \sum_{t \in T} a_t(p) s_t(p) = \sum_{t \in T} a_t(p) \cdot \underset{\uparrow\, p \in V(S)}{0} = 0.$$

☺ □

Notation Si $\mathfrak{a} = (f_1, f_2, \dots)$, alors $V(\mathfrak{a}) = V((f_1, f_2, \dots))$
$= V(\{f_1, f_2, \dots\})$
$= V(f_1, f_2, \dots)$ ← convention

Exemple $V(0) = V(\emptyset) = k^n = \mathbb{A}^n$.

Ex (Courbes Elliptiques) Soient $a, b \in k$ et

$$f = X^3 + aX - Y^2 + b.$$

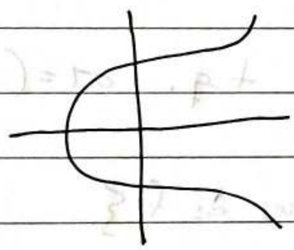
Alors $V(f) = \{ (x,y) \in k^2 \mid y^2 = x^3 + ax + b \}$

une courbe dans k^2.

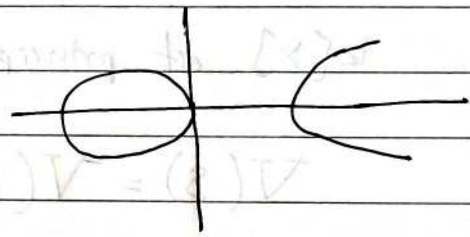
Si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, la courbe n'a pas de singularités et on l'appelle une courbe elliptique.

Dessins dans $\mathbb{R}^2$

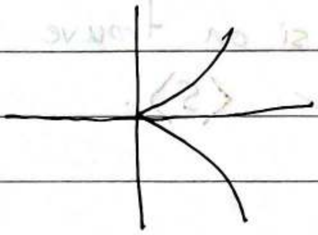
$y^2 = x^3 + 1$



$y^2 = x^3 - x = x(x^2 - 1)$

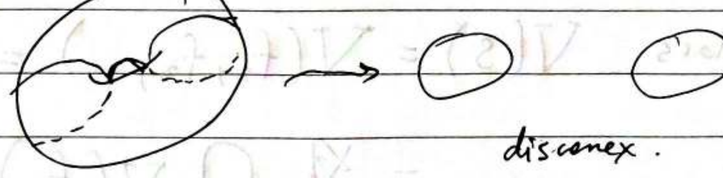


$y^2 = x^3 \quad (a = b = 0)$



! Les beaux dessins dans $\mathbb{R}^2$ peuvent nous donner de mauvaise intuition.

e.g. dans $\mathbb{C}^2$



discanex.

Proposition Le sous-ensembles algébriques de $\mathbb{A}^1 = k$ sont exactement

- $\mathbb{A}^1 = k$
- les ensembles finis

Démonstration. (1) Si $\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq k$ est fini, alors est algebrique

- si $m = 0$, $\emptyset = V(1)$ ✓
- si $m > 0$, on prend $f(X) = (X - p_1)(X - p_2) \cdots (X - p_m)$

$$V(f) = \{\text{racines de } f\} = \{p_1, \dots, p_m\}$$

(2) Si $V(S) \neq k$, alors $V(S)$ est fini

Soit
$$\mathfrak{a} = \langle S \rangle$$

$k[X]$ est principal $\Rightarrow$ $\exists f \in k[X]$ t.q. $\mathfrak{a} = (f)$.

$$V(S) = V(\mathfrak{a}) = V(f) = \{\text{racines de } f\}$$

fini, borné par $\deg f$.

Idée à explorer

Il est plus facile d'identifier $V(S)$ si on trouve un "bon" ensemble de générateurs pour $\langle S \rangle$.

En effet, si $\langle S \rangle = (f_1, f_2, \dots)$

alors $V(S) = V(f_1, f_2, \dots) = V(\{f_1, f_2, \dots\})$

$$= \bigcap_t V(f_t).$$

Hilroy

2025-09-09 [Mardi]

<u>Rappel</u> Pour un idéal $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$, on définit

$$\mathbb{V}(\mathfrak{a}) = \{ p \in k^n \mid f(p) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a} \}$$

ensemble algebrique

• Soit S un ensemble de générateurs pour $\mathfrak{a}$. Alors

$$\mathbb{V}(\mathfrak{a}) = \mathbb{V}(S) = \bigcap_{f \in S} \mathbb{V}(f)$$

//

<u>Question</u> peut-on trouver S fini ?

$\Longleftrightarrow$ est-ce que $\mathfrak{a}$ est finiment engendré ?

Théoreme de la base de Hilbert : oui !

<u>Proposition</u> Soit A un anneau. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(I) chaque idéal $\mathfrak{a} \subseteq A$ est finiment engendré

(II) [Condition de chaîne ascendante] chaque suite croissante d'idéaux de A

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \cdots$$

devient constante :

$$\exists N \text{ t.q. } \mathfrak{a}_N = \mathfrak{a}_{N+1} = \cdots = \mathfrak{a}_n \ \forall n \geq N$$

(III) chaque collection non vide d'idéaux de A possède un élément maximal.

Démo "(I) ⇒ (II)" Soit $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$ une suite croisante.
Definissons
$$\mathfrak{a} = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{a}_i.$$ Il est un idéal (exercise)

Par hypothèse $\mathfrak{a}$ es f. engendré, disons $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_N)$ avec $f_i \in A$. Pour $i = 1, \dots, N$, $f_i \in \mathfrak{a}_{m_i}$ $(\exists m_i \in \mathbb{Z}^+)$
Si $M = \max\{m_i\}_{i=1}^N$, on a $\mathfrak{a}_{m_i} \subseteq \mathfrak{a}_M$, et donc $f_i \in \mathfrak{a}_M$ $\forall i = 1, \dots, N$. Alors
$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_M \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_M.$$
Au fait, $\forall n \geq M$, on a
$$\mathfrak{a}_M \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_M \Rightarrow \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_M$$

"(II) ⇒ (III)" Soit $\Sigma \neq \emptyset$ une collection d'idéaux. On cherche
$$\mathfrak{a} \in \Sigma \text{ t.q. si } \mathfrak{b} \in \Sigma \text{ et } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \text{ alors } \mathfrak{a} = \mathfrak{b}.$$

Supposons vers une contradiction que tel $\mathfrak{a}$ n'existe pas.
Choissisons $\mathfrak{a}_1 \in \Sigma$ quelconque. (Il n'est pas maximal)
Alors
$$\exists \mathfrak{a}_2 \in \Sigma \text{ avec } \mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2.$$
$$\Rightarrow \exists \mathfrak{a}_3 \in \Sigma \text{ avec } \mathfrak{a}_2 \subsetneq \mathfrak{a}_3$$
$$\vdots$$
repet avec Axiom of choice.

On construit une suite strictment croissante que ne devient jamais constante.
contradiction de (II).

∴ Σ contient un élément maximal.

"(III) $\Rightarrow$ (II)" Soit $\mathfrak{a}$ un idéal. On v.m.q. $\mathfrak{a}$ est f.e.

On définit $\Sigma = \{ \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \mid \underbrace{\mathfrak{b}}_{\text{idéal}} \text{ f.e.} \}$.

$\Sigma \neq \emptyset$ car $\mathfrak{a} \in \Sigma$.

Par (III), Σ possède un élément $\mathfrak{b}$ maximal.

stratégie démontrer que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, et donc $\mathfrak{a}$ est f.e.

Si $\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{a}$, $\exists a \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$

$\mathfrak{b} \in \Sigma \Rightarrow \mathfrak{b} = (f_1, \dots, f_m)$, $\exists f_i \in \mathfrak{a}$

Considerons $\underset{\text{es une c}}{\mathfrak{c}} = (f_1, \dots, f_m, a) \Rightarrow \mathfrak{c} \in \Sigma$, mais $\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{c}$

\# contradiction maximalité de $\mathfrak{b}$.

$\therefore$ $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ comme voulu. $\square$

Def Un anneau A qui satisface ces propriétés est un anneau noethérien. (Emmy Noether)

Rappel On v.m.q. chaque idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ est f. eng. c'est-à-dire que $k[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien.

Théorem [La théorem de la base de Hilbert]

$k[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien

Hilroy

Demo (par récurrence sur n)

base ($n=1$) $k[X]$ est un anneau principal.
(chaque élément est eng. par 1 élément).

récurrence Soit $n \geq 2$ et supp. que $k[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien.

On prétend que $k[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n] = k[X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n]$

La proposition suivra du lemme suivant.

Lemme si A est noethérien, $A[X]$ l'est aussi.

Demo du lemme Soit A noethérien. Pour $f(X) \in A[X]$, on écrit

$$f(X) = a_0 X^{r} + a_1 X^{r-1} + \cdots + a_{r-1} X + a_r \quad (a_0 \neq 0)$$
$a_i \in A$.

On appelle a_0 le coefficient directeur (leading coefficient) et r le degré.

Soit $\mathfrak{a} \subseteq A[X]$ un idéal on v.m.q. c'est f.e.

- Si $\mathfrak{a} = A[X]$, on a $\mathfrak{a} = (1)$ ✓
- Alors supposons que $\mathfrak{a} \subsetneq A[X]$

Pour $r \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathfrak{a}(r) = \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} a \text{ est le coef. dir. d'un polynôme} \\ f \in \mathfrak{a} \text{ de degré } r \end{array} \right\} \cup \{0\}$$

Hilroy

Exercise à vérifier (a) $\mathfrak{a}(r) \subseteq A$ est un idéal.

(b) $\mathfrak{a}(r) \subseteq \mathfrak{a}(r+1)$ $\forall r$.

Alors $\mathfrak{a}(0) \subseteq \mathfrak{a}(1) \subseteq \mathfrak{a}(2) \subseteq \cdots$ est une suite croissante d'idéaux de A.

A noethérien implique que

(1) chaque $\mathfrak{a}(r)$ est f.e.

(2) $\exists d$ t.q. $\mathfrak{a}(d) = \mathfrak{a}(d+1) = \cdots$

En particulier, $\forall r \leq d$ choisissons un ensemble générateur pour $\mathfrak{a}(r)$: $\{a_{r_1}, \ldots, a_{r_{n_r}}\}$.

et un ensemble de polynômes $\{f_{r_1}, f_{r_2}, \ldots, f_{r_{n_r}}\}$ t.q.

f_{r_j} est dans $\mathfrak{a}$, de degré r, avec coef. directeur égal à a_{r_j}.

Prenons $\mathfrak{b} \subseteq A[X]$ l'idéal engendré par l'ensemble fini

$$\{f_{11}, \ldots, f_{1n_1}\} \cup \{f_{21}, \ldots, f_{2n_2}\}$$
$$\cup \cdots \cup \{f_{d_1}, \ldots, f_{d n_d}\}$$

On prétend que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ et donc $\mathfrak{a}$ est f.e.

$f_{ij} \in \mathfrak{a}$ $\forall i,j \Rightarrow \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$

$\underset{\text{exercise}}{\Longrightarrow} \forall r,\ \mathfrak{b}(r) \subseteq \mathfrak{a}(r)$

de plus: $\mathfrak{b}(r) := \left\{ \begin{array}{c} \text{coef. directeurs des polynômes} \\ \text{de degré } r \text{ dans } \mathfrak{b} \end{array} \right\} \cup \{0\}$

$\supseteq \{ a_{r1}, \dots, a_{m_r} \}$

Alors $\mathfrak{a}(r) \supseteq (a_{r1}, \dots, a_{rn_r}) = \mathfrak{a}(r)$

$\therefore \; \mathfrak{b}(r) = \mathfrak{a}(r) \quad \forall r.$

Il suffit de démontrer le lemme suivant:

Lemme Soit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ deux idéaux dans $A[X]$ t.q.

$\mathfrak{b}(r) = \mathfrak{a}(r) \quad \forall r.$

Alors

$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}.$

Demo Soit $f \in \mathfrak{a}$ avec $\deg(f) =: r$

On va montrer par récurrence sur r que $f \in \mathfrak{b}$.

- Si $r = 0$, $f = a_0 \in \mathfrak{a}(0) = \mathfrak{b}(0)$. Alors $f \in \mathfrak{b}$.

- Supposons que $r \geq 1$ et que $\forall g \in \mathfrak{a}$ avec $\deg(g) < r$ on a $g \in \mathfrak{b}$.

Écrivons $f(X) = a_0 X^r + a_1 X^{r-1} + \dots + a_r$

$\hookrightarrow a_0 \in \mathfrak{a}(r) = \mathfrak{b}(r)$

$\Rightarrow \exists h_1 \in \mathfrak{b}$ de la forme

$a_0 X^r + b_1 X^{r-1} + \dots + b_r$

On a $(f-h)(X) = (a_1-b_1)X^{r-1} + \dots + (a_r - b_r) \in \mathfrak{a}$

de degré $\leq r-1$

$\Rightarrow$ par récurrence $f-h \in \mathfrak{b}$

$\Rightarrow$ $f = (f-h) + h \in \mathfrak{b}$.

Rappel Les axioms satisfaits par la famille des ensembles fermés d'un espace topologique T :

(a) $\emptyset, T$ sont fermés

(b) X, Y fermés $\Rightarrow X \cup Y$ fermés

(c) $\{X_i\}_{i \in I}$, X_i fermé $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} X_i$ fermé.

BUT définir une topologiqe sur $\mathbb{A}^n = k^n$ t.q. un esemble est fermé

$\Leftrightarrow$ c'est algébrique.

"La topologie de Zariski"

On a besoin de vérifier les trois propriétés

Proposition (i) $\emptyset = V(k[X_1, \dots, X_n])$ ✓

$\mathbb{A}^n = V(0)$ ✓

(ii) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ Hilroy

(III) $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$

Dvm (I) c'est fait. (III) exercice. On v.d. (II).

Rappell (a) $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \Rightarrow V(\mathfrak{a}_2) \subseteq V(\mathfrak{a}_1)$

(b) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

Par (a) et (b), $V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$

Alor $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$

Si $p \notin V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ on v.m.q. $p \notin V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$

$\Longrightarrow \exists f \in \mathfrak{a}$ t.q. $f(p) \neq 0$

$\exists g \in \mathfrak{b}$ t.q $g(p) \neq 0$

$\Longrightarrow fg \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ et $(fg)(p) = f(p)g(p) \neq 0$.

$\Longrightarrow p \notin V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$

$\therefore V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ $\square$

Hilroy

2025-09-12

<u>Rappel</u> La topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n$

$$V \subseteq \mathbb{A}^n \text{ est fermé} \iff V = \mathbb{V}(\mathfrak{a}) \text{ est algebrique.}$$

<u>Def</u> Si $Y \subseteq \mathbb{A}^n$, la topologie de Zariski sur Y est la topologie induite :

$$V \subseteq Y \text{ fermé} \iff V = \mathbb{V}(\mathfrak{a}) \cap Y$$

<u>Exemple</u> On a vu que dans $\mathbb{A}^1$, les ensembles fermés sont

$\mathbb{A}^1$, les ensembles finis

$\iff$ les ouverts sont   cette liste peut-être $\emptyset$

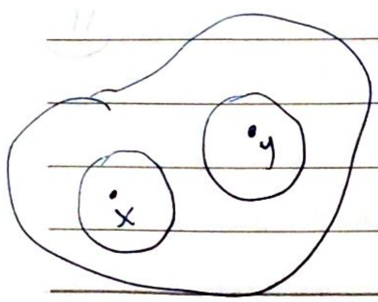
$$\emptyset \text{ et } \underbrace{\mathbb{A}^1 \setminus \{p_1, \dots, p_m\}}_{\text{très grand!}}$$

⚠ c'est une topologie étrange.

<u>Rappel/def</u> Un espace topologique T est Hausdorff (ou separé, ou T_2) si

$$\forall x \neq y \in T, \exists \text{ ouverts } U_1, U_2 \subseteq T \text{ t.q.}$$

$$x \in U_1, \; y \in U_2 \text{ et } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$



$\mathbb{A}^n$ n'est pas Hausdorff

Exemple $x \neq y \in \mathbb{A}^1 = k$ (corps fini)

Si $x \in \mathcal{U}_1 = \mathbb{A}^1 \setminus \underbrace{V(a)}_{\text{fini}}$

$y \in \mathcal{U}_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \underbrace{V(b)}_{\text{fini}}$

alors $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \underset{\text{infini}}{\mathbb{A}^1} \setminus \left(\underbrace{V(a) \cup V(b)}_{\text{fini}} \right) \neq \emptyset$

Remarque $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ donne une fonction

$$f : k^n = \mathbb{A}^n \longrightarrow k = \mathbb{A}^1$$

c'est continue pour les topologies de Zariski.

Soit $\lambda \in k$, $\{\lambda\} \subseteq k$ fermé.

$$f^{-1}(\{\lambda\}) = \{ p \in k^n \mid f(p) = \lambda \}$$

$$= V(f - \lambda) \leftarrow \text{fermé}$$

$$f^{-1}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}) = \bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(\{\lambda_i\}) = \bigcup_{i=1}^{N} V(f - \lambda_i) \text{ fermé!}$$

Définition Pour $\alpha \in k[X_1, \dots, X_n]$, posons

$$D(\alpha) := \mathbb{A}^n \setminus V(\alpha)$$

$$= \{ p \in \mathbb{A}^n \mid \alpha(p) \neq 0 \} \text{ ouvert}$$

"ensemble ouvert principal / de base"

[distinguished open]

En général, un ouvert est de la forme

$$\mathcal{U} = \mathbb{A}^n \setminus V(\mathfrak{a})$$

$$= \mathbb{A}^n \setminus V(f_1, \dots, f_N) \quad \text{(merci Hilbert!)}$$

$$= \mathbb{A}^n \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{N} V(f_i) \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{N} \mathbb{A}^n \setminus V(f_i)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{N} D(f_i)$$

Proposition $\{D(\alpha)\}_{\alpha \in k[X_1, \dots, X_n]}$ donne une base pour la topologie de Zariski.

En fait, chaque ouvert est une union finie de ces $D(\alpha)$

— // —

Rappel/

$$\left\{ \begin{matrix} \text{idéaux de} \\ k[X_1,\dots,X_n] \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\ \mathbb{V}\ } \left\{ \begin{matrix} \text{ensembles} \\ \text{algébriques de } \mathbb{A}^n \end{matrix} \right\}$$

$\mathbb{V}$ es surjectif par df.

mais n'est pas injectif

par exemple $\mathbb{V}(X) = \{0\} \subseteq \mathbb{A}^1$

$$\mathbb{V}(X^2) = \{0\}$$

mais

$$(X^2) \subsetneq (X).$$

__Question__ Quand est-ce que • $\mathbb{V}(\mathfrak{a}) = \mathbb{V}(\mathfrak{b})$?

• $\mathbb{V}(\mathfrak{a}) = \emptyset$

$$\mathbb{V}(\mathfrak{a}) = \emptyset \iff \mathfrak{a} = (g_1, \dots, g_m)$$

avec $\{ g_i(X_1, \dots, X_n) = 0 \}_{i=1}^{m}$

un système inconsistent.

__Obs__ On sait que $\mathbb{V}(k[X_1,\dots,X_n]) = \emptyset$

$\therefore$ $\mathbb{V}(S) = \emptyset$ si $\langle S \rangle = k[X_1,\dots,X_n]$

on va montrer que c'es $\iff$

$\iff 1 \in \langle S \rangle$

$\iff \exists f_i \in k[X_1,\dots,X_n]$ et $g_i \in S$ t.q. $1 = \sum_{i=1}^{N} f_i g_i$

Déf 1) B est une A-algèbre finiment engendré

si $\exists \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$

t.q. l'homomorphisme

$$A[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow B$$

$$X_i \longmapsto b_i$$

$$f(X_1, \dots, X_n) \longmapsto f(b_1, \dots, b_n)$$

est surjectif.

2) B est une A-algèbre finie si c'est finiment engendré en tant que A-module.

$\overset{\text{i.e.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq B$ t.q.

$\forall b \in B, \exists a_i \in A$ t.q.

$$b = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

⚠ (2) est beaucoup plus forte

Example $B = A[X]$ est engendrée comme A-algèbre par X, mais comme A-module par

$$\{1, X, X^2, \dots, X^N, \dots\}$$

Alors B n'est pas une A-algèbre finie.

Def Soient $k \subseteq K$ deux corps.

$\alpha \in K$ est algèbrique sur k si $\exists$ polynôme

$f \in k[X]$ t.q. $f(\alpha) = 0 \in K$

$\Leftrightarrow \exists a_0, \dots, a_n \in k$ t.q.

$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0.$

Exemple $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$: $\sqrt{2}$ est algèbrique (racine de $X^2 - 2$).

π n'est pas algebrique

· K est algèbrique sur k si chaque $\alpha \in K$ est algébrique sur k. (On dit K est une extension algébrique)

Ex · $\mathbb{R}$ n'est pas algebrique sur $\mathbb{Q}$.

· $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{R}$.

· k est algébriquement ~~fermé~~ clos si la seule extension algébrique de k est lui-même.

$\Leftrightarrow \forall K \supseteq k$ et $\alpha \in K$ algébrique sur k, on fait $\alpha \in k$.

$\Leftrightarrow$ chaque polynôme non-constant $f \in k[X]$ a une racine.

Théoreme [Lemme de Zariski]

Soient $k \subseteq K$ deux corps.
Si K est finiment engendrée comme algèbre sur k, alors K est alg. sur k.

En particulier, si on sait aussi que k est algébriquement clos, alors $k = K$

Démontration à venir!

Corollaire Soit k algebriquement fermé. La fonction V donne une bijection

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{idéaux max} \\ \text{de } k[X_1, \dots, X_n] \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \text{points de } \mathbb{A}^n \right\}$$

$\overset{\text{II?}}{}$ (en fait $\left\{ \begin{array}{l} \text{ensembles d'} \\ \text{ordre } 1 \\ \text{dans } \mathbb{A}^n \end{array} \right\}$)

$$m \longmapsto V(m)$$

$$m_p = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \xleftarrow{\quad I \quad} p = (a_1, \dots, a_n)$$

Démontrer. ~~2)~~ Il faut démontres les faites suivants

1) m_p est maximal $\left(\frac{k[X_1, \dots, X_n]}{m_p} \cong k \text{, un corp} \right)$

2) I es injectif (clair: $P \neq Q \Rightarrow m_P \neq m_Q$)

pero esto ya nos dice que I es injective!?

3) I es surjectif, 4) $V \circ I = Id.$

Hilroy

3) $\mathcal{I}$ est surjectif - il faut demontrer que chaque idéal m est de la forme m_p

4) $V \circ \mathcal{I} = id$

$$V \circ \mathcal{I}(p) = V(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

$$= \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid x_i - a_i = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$$

$$= \{(a_1, \dots, a_n)\} = \{p\}$$

Il nous reste vérifier (3).

Soit $m \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ maximal.

$\Rightarrow K := k[X_1, \dots, X_n]/m$ est un corp.

on a
$$\begin{array}{ccccc} k & \longrightarrow & k[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\pi} & K \\ & & X_i & \longmapsto & X_i + m \\ 1 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 1 + m \\ & & & & := 1_K \end{array}$$

. K est finiment engendrée sur k par

$$\{X_i + m\}_{i=1}^{n}$$

$\Rightarrow$ par le lemme de Zariski $k = K$

définissons $a_i := X_i + m \in k$

Alors $\pi(X_i - a_i) = \pi(X_i) - a_i = a_i - a_i = 0.$

$$\Rightarrow \underbrace{(X_i - a_i)_{i=1}^{n}}_{m_p \text{ pour } p=(a_1,\dots,a_n)} \subseteq Ker(\pi) = m \subsetneq k[X_1,\dots,X_n]$$

$\therefore$ par maximalité de m_p (partie (i))

Il faut que $m_p = m$!! $\square$

Théoréme [la théorème des zéros de Hilbert]

[Hilbert's Nullstellensatz]

Chaque idéal propre

$$\mathfrak{a} \subsetneq k[X_1,\dots,X_n]$$

possède un zéro dans k^n.

$$(\Leftrightarrow V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset)$$

Démo. On cherche $p \in V(\mathfrak{a})$

Comme $k[X_1,\dots,X_n]$ est noethérien

$\exists$ idéal maximal m avec $\mathfrak{a} \subseteq m$ et donc

$V(m) \subseteq V(\mathfrak{a})$, alors il suffit

de trouver $p \in V(m)$.

Hilroy

mais on vient de démontrer que

$\exists P \in k^n$ t.q. $m = m_P$

et que $V(m_P) = \{P\}$ $\square$

Il nous reste à démontrer le lemme de Zariski.

mais on vient de démontrer que

$\exists P \in k^n$ t.q. $m = m_P$

et que $V(m_P) = \{P\}$ $\square$

Il nous reste à démontrer le lemme de Zariski.

#2025-09-16.

Rappel <u>Théorème des zéros de Hilbert.</u>

$$V(\sigma) = \emptyset \iff \sigma = k[X_1, \dots, X_n]$$

Pour compléter la preuve, on a besoin de démontrer le lemme de Zeros de Zariski.

(Si $k \subseteq K$ et K est finiment engendrée comme k-algèbre, alors K est algébrique sur k)

—— // ——

<u>Définition</u> • Soit A un anneau.

$$f(x) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in A[X]$$

Si $a_0 = 1$ on dit que f est unitaire (monic)

• Soient $A \subseteq B$ deux anneaux. On dit que $\alpha \in B$ es entier [integral] sur A si α est la racine d'un polynôme unitaire $f(X) \in A[X]$

avec $a_i \in A$.

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

Hilroy

• Si chaque $\alpha \in B$ est entier sur A, on dit ~~que~~ / ~~l'anneau~~ B est entier sur A.

• Si B est une A-algèbre avec $i_B : A \longrightarrow B$ et on note

$$\bar{A} = \operatorname{im}(i_B)$$

alors on dit que $\alpha \in B$ est entier sur A si c'est entier sur $\bar{A}$
et B est entière comme A-algèbre si c'est entier sur $\bar{A}$

Exemple $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

• $\alpha = \sqrt{5}$: racine de $X^2 - 5 \Rightarrow \alpha$ entier ✓

• $\alpha = \frac{1}{2}$: racine de $2X - 1$ (non unitaire !!)
en fait α n'est pas entier.

Exemple $k \subseteq K$ deux corps.

$\alpha \in K$ est entier sur $k \iff$ c'est algébrique

Preuve "$\Rightarrow$" claire.

"$\Leftarrow$" Si $a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$
avec $a_i \in k$ et $a_0 \neq 0$,
on peut diviser par a_0 car k est un corp.

$$\alpha^n + \frac{a_1}{a_0} \alpha^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{a_0} = 0.$$

unitaire. $\Rightarrow \alpha$ entier.

Note Pour corps, n'est pas necesaire travailler avec entir (ness)

BUT Un critère pour déterminer si $\alpha \in B$ est entier sur A.

Proposition 1 [Règle de Cramer]

Soit $(x_1, \dots, x_m) \in A^m$ une sol. au système d'équations linéaires:

$$i = 1, \dots, m \qquad \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j = 0, \quad c_{ij} \in A.$$

Posons $C = (c_{ij}) \in M_{m \times m}(A)$

Alors $\det(C) \cdot x_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$

démo définissons $\tilde{C}_j = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1(j-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & & \end{bmatrix}$

$$\tilde{C}_j = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1(j-1)} & \sum_{k=1}^{m} c_{1k} x_k & c_{1(j+1)} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & & c_{n(j-1)} & \sum_{k=1}^{m} c_{mk} x_k & c_{m(j+1)} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

On a $\det(\tilde{C}_j) = 0$. Mais aussi

$$\det \tilde{C}_j = \sum_{k=1}^{m} \det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{1(j-1)} & c_{1k} x_k & c_{1(j+1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ c_{m1} & c_{m(j-1)} & c_{mk} x_k & c_{m(j+1)} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\det \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1(j-1)} & c_{1k} & c_{1j+1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj-1} & c_{nk} & c_{nj+1} & \cdots \end{bmatrix}}_{\begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \det(C) & \text{si } k = j \end{cases}}$$

$$= \det(C) \cdot x_j$$

$\square$

Def Un A-module M est fidèle [faithful] si pour $a \in A \setminus \{0\}$

$$\underbrace{aM \neq \{0\}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists m \in M \text{ t.q. } am \neq 0.$$

Exemple • Si $i_B : A \to B$ avec $\bar{A} := i_B(A) \subseteq B$ alors

B est toujours fidèle comme $\bar{A}$-module. (car $1_B \in B$)

• B est fidèle comme A-module $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(i_B) = \{0\}$.

Notation Soient $A \subseteq B$ deux anneaux et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in B$.
On écrit $A[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \subseteq B$
pour l'image de

$$A[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow B$$
$$X_i \longmapsto \alpha_i$$

(ou pour $i_B : A \longrightarrow B$ on écrit $\bar{A}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \subseteq B$)

c'est finiment engendrée (comme A-algèbre)

mais pas nec. finie.

Exemple $A = \mathbb{Z}$ $\quad \alpha = \sqrt{2}$

$$\begin{array}{c} A \\ \cap \\ B = \mathbb{R} \end{array}$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{ \sum_{i=0}^{N} a_i \sqrt{2}^i \;\middle|\; \begin{array}{c} N < \infty \\ a_i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

mais $\sqrt{2}^2 = 2$

$$= \left\{ a_0 + a_1\sqrt{2} \;\middle|\; a_0, a_1 \in \mathbb{Z} \right\}$$

(finie : engendré comme $\mathbb{Z}$-module par $\{1, \sqrt{2}\}$)

Prop 2 Soient $A \subseteq B$ deux anneaux et soit $\alpha \in B$.

α est entier sur A

$\Updownarrow$

$\exists$ un $A[\alpha]$-module fidèle $M \subseteq B$.

(sous)

qui est finiment engendré comme A-module.

Hilroy

Démo. "$\Rightarrow$" On suppose que α est entier sur A.
Alors $\exists a_i \in A$ t.q. $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0$. $(*)$

Soit M le A-sous-module de B, engendré par $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$.

Il faut montrer que
- M est un $A[\alpha]$-module
- M est fidèle comme

$$M = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} x_i \alpha^i \;\middle|\; a_i \in A \right\}$$

On a
$$\alpha \sum_{i=0}^{n-1} x_i \alpha^{i+1} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} x_i \alpha^{i+1}}_{\in M} + x_n \alpha^n$$

Par $(*)$, $x_n \alpha^n = \underbrace{x_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} -a_{n-i} \alpha^i \right)}_{\in M}$.

Donc la somme $\in M$. OK ✓

Monstrons M est fidèle comme $A[\alpha]$-module.

- Soit $x \in A[\alpha] \setminus \{0\}$. On note que $1_B \in M$
et que
$x \cdot 1 = x \neq 0$
$\Rightarrow M$ est fidèle.

"$\Leftarrow$" (Ici on utilise la règle de Crammer)

Supposons qu'on a $M \subseteq B$ un $A[\alpha]$-sous-module fidèle de B engendré par $\{e_1, \dots, e_n\}$
A-module

Alors $\forall i = 1, \dots, n$ on a $\alpha e_i \in M$.

$\Rightarrow \exists a_{ij} \in A$ t.q. $\alpha e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$

$\boxed{\text{Pour } i=1}$ $(\alpha - a_{11}) e_1 - a_{12} e_2 - \dots - a_{1n} e_n = 0$.

$\boxed{\text{Pour } i=2}$ $-a_{21} e_1 + (\alpha - a_{22}) e_2 - a_{23} e_3 - \dots - a_{2n} e_n = 0$.

$\vdots$

$\boxed{\text{Pour } i=n}$ $-a_{n1} e_1 - \dots - (\alpha - a_{nn}) e_n = 0$

On pose
$$C_{ij} = \begin{cases} \alpha - a_{ii} & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

et
$$C = (C_{ij})$$

Par le règle de cramer $\Rightarrow \det(C) \cdot e_i = 0 \quad \forall i$.

$\Rightarrow \det(C) \cdot m = 0 \quad \forall m \in M$

mais M est fidèle $\Rightarrow \det(C) = 0$.

mais $\det(C)$ est un polynôme unitaire dans α de deg n, avec coeffents des produits et sommes des a_{ij} en particulier dans A.

$\rightsquigarrow \alpha^n + c_1 \alpha^{n-1} + \dots + c_n = 0$

$\Rightarrow \alpha$ est entier sur A $\square$

Hilroy

Proposition 3 Une A-algèbre B est finie si ~~…~~ elle est engendrée comme A-algèbre par un ensemble fini ~~…~~ d'éléments entiers sur A.

Démo Écrivons $B = A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$

avec

$\alpha_i \in B$ entiers sur A.

$\Rightarrow$ pour $i = 1, \dots, n$, $\exists a_{ij} \in A$

t.q. $\alpha_i^{d_i} + a_{i1}\alpha_i^{d_i - 1} + \dots + a_i d_i \overset{(*)}{=} 0$.

- On sait que B est engendré comme A-module par l'ensemble infini des monômes

$$\left\{ \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \cdots \alpha_n^{r_n} \;\middle|\; r_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

(*) implique que l'ensemble fini

$$\left\{ \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \cdots \alpha_n^{r_n} \;\middle|\; r_i \leq d_i \right\}$$

es suffisant $\boxed{Z}$

Corollaire Une A-algèbre B est finie $\Leftrightarrow$ elle est finiment engendrée ~~…~~ et entière sur A.

Démo " $\Leftarrow$ " Suit de prop. 3.

" $\Rightarrow$ " finie $\Rightarrow$ finiment engendrée, alors il reste à démontrer que chaque élément $\alpha \in B$ est entier sur A.

- Considérons $\bar{A} := i_B(A) \subseteq B$

B est fidèle comme $\bar{A}[\alpha]$-module
(car $1 \in B$)
et finie comme A-module

Alors : prop 2 $\Longrightarrow$ α est entier sur $\bar{A}$
et donc sur A $\square$

Prop 4 [« être entier » est transitif]

Soient $A \subseteq B \subseteq C$ trois anneaux.
Si
B est entier sur A.
et C est entier sur B.
Alors
C est entier sur A.

Démo Soit $\gamma \in C$, en

entier sur B $\Longrightarrow$ $\exists b_i \in B$ t.q.

$$\gamma^n + b_1\gamma^{n-1} + \cdots + b_n = 0.$$

B entier sur A $\underset{\text{prop 3}}{\Longrightarrow}$ $A[b_1, \dots, b_n]$ est finie sur A

$M = A[b_1, \dots, b_n][\gamma]$ est aussi finie sur $A[b_1, \dots, b_n]$

Hilroy

et donc sur A.

M est un $A[\gamma]$-module fidèle.

et γ est entier par Prop 2 $\square$

Prochaine vendredi : Démo lemme Zariski

On verra ~~...~~ le lien geometrique de ces propositions.

et donc sur A.

M est un $A[\gamma]$-module fidèle.

et γ est entier par Prop 2 $\square$

Prochaine vendredi : Démo lemme Zariski

On verra le lien geometrique de ces propositions.

2025-09-19

Rappel $A \subseteq B$. Un élément $\alpha \in B$ est entier sur A
$\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in A$ t.q.

Unitaire! $\longrightarrow \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

Prop 2 $\Leftrightarrow \exists$ un $A[\alpha]$-sous-module fidèle de B qui est finiment engendré comme A-module

Prop 3
- Une A-algèbre B est finie
- $\Leftrightarrow$ elle est finiment engendrée et entière sur A

Cours d'aujourd'hui:

Théorème: Soient $A \subseteq B$ deux anneaux. Alors

$$C = \{ \alpha \in B \mid \alpha \text{ est entier sur } A \}$$

est une A-algèbre de B.

↳ Def C est la fermeture intégrale de A dans B.

Démonstration. $1_A, 0_A \in C$

Il faut m.q. $\forall \alpha, \beta \in C$, on a $\alpha+\beta \in C$, $\alpha\beta \in C$.

$\boxed{\text{Prop 3}} \Rightarrow A[\alpha,\beta]$ est finiment engendré comme A-module.

Il est un $A[\alpha+\beta]$-module fidèle car $1 \in A[\alpha,\beta]$.

$\boxed{\text{Prop 2}} \Rightarrow \alpha+\beta$ est entier sur A.
$\Rightarrow \alpha+\beta \in C$.

Par le même raisoñement, $\alpha\beta \in C$ $\square$

Proposition. Soit A un anneau intègre.
Soit F son corps de fractions.
(éléments $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ t.q.
$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b$)

Supposons que $F \subseteq K$, un autre corps.
Si $\alpha \in K$ est algèbrique sur F, alors $\exists d \in A \setminus \{0\}$ t.q. $d\alpha$ est entier sur A.

Exemple $A = \mathbb{Z}$, $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$.

- $\frac{\sqrt{5}}{2}$ est algebrique sur $\mathbb{Q}$ (racine de $4x^2 - 5 = 0$)
- $2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$ est entier sur $\mathbb{Z}$ (racine de $x^2 - 5 = 0$)

mais ~~alg~~ n'est pas alg. sur $\mathbb{Z}$

Hilroy

Démo. α algébrique : $\exists a_i \in F$ avec $a_0 \neq 0$ t.q.

$$a_0\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

F est un corps et $a_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ on peut définir

$$b_i = \frac{a_i}{a_0} \in F$$

$$\Rightarrow \alpha^m + b_1\alpha^{m-1} + b_2\alpha^{m-2} + \dots + b_m = 0 \quad (*)$$

(poly unitaire mais $b_i \in F$, pas A)

Soit $d \in A$ un dénominateur commun pour les fractions $b_i = \frac{p_i}{q_i}$ (e.g. $d = \pi q_i$)

$$\Rightarrow d p_i \in A \quad \forall i$$

On multiplie $(*)$ par d^m :

$$\underbrace{d^m\alpha^m}_{(d\alpha)^m} + \underbrace{d^m b_1 \alpha^{m-1}}_{\underbrace{(db_1)}_{\in A}(d\alpha)^{m-1}} + \underbrace{d^m b_2 \alpha^{m-2}}_{\underbrace{(d^2b_2)}_{\in A}(d\alpha)^{m-2}} + \dots + \underbrace{d^m b_m}_{\underbrace{d^m b_m}_{\in A}} = 0$$

Alors $d\alpha$ est entier sur A. $\square$

corps de fractions

Corollaire. Soit $A \subseteq F \subseteq K$ comme dans la proposition. Supposons que K es algébrique sur F. Si $\tilde{A}$ est la fermeture intégrale de A dans K, alors le corps de fractions $\tilde{F}$ de $\tilde{A}$ est égal à K.

Demo. $\tilde{F}$ est le corps minimal qui contient $\tilde{A}$. Comme $\tilde{A} \subseteq K$, alors $\tilde{F} \subseteq K$.

Alors il reste à montrer que $K \subseteq \tilde{F}$.

Soit $\alpha \in K$, algébrique sur F.

$\Rightarrow \exists d \in A \setminus \{0\}$ t.q. $d\alpha$ est entier sur A (par la prop.)

$\Leftrightarrow d\alpha = \beta \in \tilde{A}$

donc $\alpha = \dfrac{\beta}{d} \in \tilde{F}$ $\blacksquare$

Définition La clôture intégrale d'un anneau intégrale d'un anneau intègre A est sa fermeture integral $\tilde{A}$ dans son propre corps de fractions:

$$A \subseteq \tilde{A} \subseteq F$$

A es intégralement clos si $A = \tilde{A}$

integre $\neq$ integral.

$\Downarrow$

chaque fraction $\alpha = \frac{a}{b} \in F$ qui est entier sur A est en fait déjà dans A.

<u>Théoréme/exemples</u> Un anneau factoriel A est intégralement clos

<u>Rappels</u> Soit A un anneau intègre.

- $a \in A$ est irréductible si

$a \neq 0$, $a \notin A^\times$, et a n'est pas produit de deux éléments non-inversibles.

$\Longleftrightarrow$ si $a = bc$, soit $b \in A^\times$, soit $c \in A^\times$.

A est un anneau factoriel si $\exists$ un équivalent de la théorème fondamentale de l'arithmétique :

$\forall a \in A \setminus \{0\}$: a se décompose en d'éléments irréductibles, uniquement aux éléments inversibles près et à ordre près.

<u>Demo</u> v.m.q. si $\frac{a}{b}$ est entier sur A, alors $\frac{a}{b} \in A$.

Alors supposons que $\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \in F$

(avec $a_i \in A$)

Multiplions par b^n:

$(*)$ $a^n + ba_1a^{n-1} + \cdots + b^na_n = 0 \in A$

Hilroy

Si $\frac{a}{b} \notin A$, $\exists p$ irréductible qui est un facteur de b mais pas de a.

Mais $(*) \Rightarrow \underbrace{a^n = -ba_1a^{n-1} - \cdots - b^n a_n}_{\text{divisible par } b \text{ et donc par } p}$

Alors $p \mid a^n$.

$\Rightarrow$ (Comme p est irréductible)

$p \mid a$

$\therefore \frac{a}{b} \in A$ comme voulu $\square$

ojo: $\mathbb{Z}$ est factoriel

eso implica que...?

Théoréme [Zariski] Soient $k \subseteq K$ deux corps.

Si K est finiment engendrée comme k-algèbre, alors c'est algébrique sur k.

Démo. (Par recurrence sur le nombre r de générateurs de K comme k-algèbre.)

Quand $r=0$, $k=K$ et il n'y a rien à faire.

Alors fixons $r>0$ et supposons que chaque corps de la forme

$$F[a_1, \ldots, a_s] \quad \text{avec} \quad s<r$$

est algebrique sur F.

Hilroy

On considère notre corps $K = k[a_1, \dots, a_r]$ avec $a_i \in K$.

Si K n'est pas algébrique sur k, au moins un des générateurs ne l'est pas non plus, disons a_r.

$$\Longrightarrow \quad k[a_r] \cong k[X]$$ un anneau de polynômes.

<u>Observation</u> $k[X]$ possède une infinité de polynômes unitaires irréductibles distincts.

si $|k| = \infty$, on a $\{X - a \mid a \in k\}$ ~~même si~~

même si $|k| < \infty$ on utilise l'argument de Euclide

On sait que $k[a_r] \subsetneq k(a_r) \subseteq K$ (le corps de fract. est un corps minimal)

$$k[a_r] \cong k[X] \qquad F = k(a_r) \cong k(X) = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \right\}$$ un corps.

$\Longrightarrow$ K es engendré comme F-algèbre par $a_1, \dots, a_{r-1}$

$\Longrightarrow$ (par hypothèse de récurrence)

$a_1, \dots, a_{r-1}$ sont tous algébriques sur $F = k(a_r)$

$\Longrightarrow$ $\exists d \in k[a_r]$ t.q. chaque $d a_i$ est entier sur $k[a_r]$

Hilroy

Maintenant soit $f \in k(a_r)$ (par ex: $f = \frac{1}{g}$ avec g irréduc. unitaire)

⊛ [On prétend que $\exists N \gg 0$ t.q. $d^N f \in k[a_r]$

↳ cela implique que $g \mid d^N$

$\forall g$ irréductible unitaire

Mais c'est impossible que d ait un nombre infini de facteurs ! #

On veut montrer ⊛

$$f \in k(a_r) \subseteq K = k[a_1, \dots, a_r]$$

$$\Longrightarrow \exists N \gg 0 \text{ t.q.}$$

$$d^N f \in k[da_1, \dots, da_{r-1}, \dots, a_r]$$

(Exemple : $f = a_1^2 + a_r \Longrightarrow d^2 f = (da_1)^2 + d^2 a_r$

$$f = a_1 a_2^2 + a_3^3 a_4 + a_4^4 a_r$$

$$\Longrightarrow d^4 f \in$$)

Comme da_i sont entiers sur $k[a_r]$, alors

$d^N f$ l'est aussi.

Mais $k[a_r] \cong k[X]$ est factoriel

$\Longrightarrow$ c'est intégralement clos.

$$\Longrightarrow d^N f \in k[a_r] \quad \square$$

Rappel avec le lemme de Zariski on a pu démontrer que (pour k algébriquement fermé)

- V donne une bijection

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{m} \subseteq k[X_1, \dots, X_n] \\ \text{maximale} \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \{ p \in k^n \}$$

- Théorème des zéros de Hilbert :

$$V(\mathfrak{a}) = \emptyset \iff \mathfrak{a} = k[X_1, \dots, X_n]$$

Convention k est toujours algébriquement clos (fermé) — bonne terminologie

Prochain but construire un inverse partiel à V

$$\{ W \subseteq k^n \} \xrightarrow{I} \{ \text{idéal} \}$$

Déf $I(W) = \left\{ f \in k[X_1, \dots, X_n] \;\middle|\; \begin{matrix} f(p) = 0 \\ \forall p \in W \end{matrix} \right\}$

De plus :

(a) $V \subseteq W \Rightarrow I(W) \subseteq I(V)$

(b) $I(\emptyset) = k[X_1, \dots, X_n]$, $I(k^n) = \{0\}$

(c) $I(\bigcup W_i) = \bigcap I(W_i)$

Ex : pour k infini (vrai pour k fini, mais difficile)

#2025-09-23

Rappel pour $W \subseteq k^n$,

$$I(W) = \{ f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(p) = 0 \ \forall p \in W \}$$

↑ un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

propriétés
- $V \subseteq W \Rightarrow I(W) \subseteq I(V)$
- $I\left(\bigcup_i W_i\right) = \bigcap_i I(W_i)$

convention $k = \bar{k}$ (algébriquement clos)

Exemple Soit $P = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$

$$I(\{P\}) = \{ f \mid f(P) = 0 \} \ni X_i - a_i$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ m_P}}{(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)} \subseteq I(\{P\}) \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$$

mais m_P est maximal et donc $I(\{P\}) = m_P$.

Prop. Soit $W \subseteq k^n$.

(a) $V(I(W))$ est minimal parmi les ensembles algébriques contenant W

(b) en particulier, si W est algebrique, alors on a

$$V(I(W)) = W.$$

<u>Démo de (c)</u> c'est évident que · $V(I(W))$ est algébrique

· $W \subseteq V(I(W))$

Alors prenons $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq k^n$ un autre ensemble alg. qui contient W.

On v.m.q. $V(I(W)) \subseteq V(\mathfrak{a})$

$$W \subseteq V(\mathfrak{a}) \Rightarrow \forall p \in W, \ \forall f \in \mathfrak{a} : f(p) = 0$$

$$\Rightarrow f \in I(W) \ \forall f \in \mathfrak{a},$$

$$\Rightarrow \mathfrak{a} \subseteq I(W)$$

$$\Rightarrow V(I(W)) \subseteq V(\mathfrak{a}) \qquad \square$$

Maintenant :

$$\left\{\begin{matrix}\text{idéaux de}\\ k[X_1,\dots,X_n]\end{matrix}\right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{ensembles algébriques}\\ \text{dans } k^n\end{matrix}\right\}$$

t.q. $V \circ I = Id.$

mais $I \circ V \neq Id$

par exemple:

$$(X), (X^2) \subseteq k[X]$$

$$V(X) = V(X^2) = \{0\}$$

$$\Rightarrow I \circ V(X) = I \circ V(X^2)$$

Remarque $I(V(\mathfrak{a})) \supseteq \mathfrak{a}$

Si $f \in \mathfrak{a}$, $f(p) = 0 \;\forall p \in V(\mathfrak{a})$

$\Longrightarrow f \in I(V(\mathfrak{a}))$

Question Quel est l'image ? $Im(I) = ?$

Déf Le radical d'un idéal $\mathfrak{a} \subseteq A$ est

$$rad(\mathfrak{a}) := \{ f \in A \mid \exists r \in \mathbb{Z}^+ \text{ avec } f^r \in \mathfrak{a} \}$$

Exemple $\mathfrak{a} = (X^2) = X^2 k[X] \subseteq k[X]$

$f(X) \in rad(\mathfrak{a}) \iff \exists r$ t.q. $X^2 \mid (f(X))^r$

$\iff X \mid f(X)$

$\Rightarrow rad(X^2) = (X)$

Remarque (1) $\mathfrak{a} \subseteq rad(\mathfrak{a})$

(2) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ deux idéaux $\Rightarrow rad(\mathfrak{a}) \subseteq rad(\mathfrak{b})$

Proposition (a) $rad(\mathfrak{a})$ est un idéal.

(b) $rad(rad(\mathfrak{a})) = rad(\mathfrak{a})$

Hilroy

Démo (a) Soient $a, b \in rad(\mathfrak{a})$ et $f \in A$

v.m.q. $a+b$, $fa \in rad(\mathfrak{a})$.

(remarque: $rad(\mathfrak{a}) \neq \phi \Leftarrow \mathfrak{a} \subseteq rad(\mathfrak{a})$)

$\exists r, s$ t.q. $a^r, b^s \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow$ • $(fa)^r = f^r \underbrace{a^r}_{\in \mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$

• $(a+b)^{r+s} = \sum_{j=0}^{r+s} \binom{r+s}{j} \underbrace{a^j b^{r+s-j}}_{(*)}$

si $j \geq r$, alors $a^j \in \mathfrak{a} \Rightarrow (*) \in \mathfrak{a}$

si $j < r \Rightarrow r+s-j > s \Rightarrow b^{r+s-j} \in \mathfrak{a}$.

$\Rightarrow (*) \in \mathfrak{a}$.

$\Rightarrow (*) \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow (a+b)^{r+s} \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow a+b \in rad(\mathfrak{a})$

(b) Par le remarque (1), $rad(\mathfrak{a}) \subseteq rad(rad(\mathfrak{a}))$

Alors soit $f \in rad(rad(\mathfrak{a}))$.

Il existe r t.q. $f^r \in rad(\mathfrak{a})$

Alors $\exists s$. t.q. $(f^r)^s \in \mathfrak{a}$

$$\overset{\shortparallel}{f^{rs}} \in \mathfrak{a}$$

On peut penser à rad comme la projection orthogonale en algèbre linéal

Alors $f \in rad(\mathfrak{a})$.

$\therefore rad(\mathfrak{a}) = rad(rad(\mathfrak{a}))$ $\square$

Définition un idéal $\mathfrak{a}$ est radical si $\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$

Remarque/exercise (b) $\Rightarrow$ $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ est radical $\forall \mathfrak{a}$ idéal.

· (1) + (2) $\Rightarrow$ $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ est minimal parmi les idéaux radiciels qui contienent $\mathfrak{a}$

Lemme Soit $W \subseteq k^n$.
Alors l'idéal $I(W)$ est radiciel.

Demo v.m.q. $I(W) = \mathrm{rad}(I(W))$

"$\subseteq$" ✓

"$\supseteq$" : Soit $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ avec $f \in \mathrm{rad}(I(W))$

$\Rightarrow \exists\, r$ t.q. $f^r \in I(W)$

$\Rightarrow \forall P \in W,\ (f(P))^r = 0 \Rightarrow f(P) = 0\ \forall P \in W$

$\Rightarrow f \in I(W)$ ☐

Maintenant $\boxed{\text{On prétend que } I \circ V(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \text{ pour } \mathfrak{a} \text{ radiciel}}$

$$\left\{\begin{matrix}\text{idéaux} \\ \text{radiciels}\end{matrix}\right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{ensembles} \\ \text{algébriques}\end{matrix}\right\}$$

BUT $V \circ I = \mathrm{Id}$. typo

BUT: $\boxed{I\ V = \mathrm{Id}}$

Hilroy

Théorème [théorème des zéros de Hilbert, version forte]
[Strong Nullstellensatz]

(a) Soit $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ un idéal.
Alors
$$I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$$

(b) En particulier, pour $\mathfrak{a}$ radical, on a
$$I(V(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$$

Démo. (b) suit de (a) car $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ dans ce cas.

(a) " $\supseteq$ " $\mathfrak{a} \subseteq I(V(\mathfrak{a}))$

$$\Rightarrow \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{rad}(I(V(\mathfrak{a}))) = I(V(\mathfrak{a}))$$

" $\subseteq$ ": Soit $f \in I(V(\mathfrak{a}))$.

On cherche r t.q. $f^r \in \mathfrak{a}$.

(Si $f=0$, $f \in \mathfrak{a}$, alors supposons que $f \neq 0$)

Par le thm. de la Base de Hilbert,

$$\exists g_i \in k[X_1, \dots, X_n] \text{ t.q. } \mathfrak{a} = (g_1, \dots, g_m)$$

On considère un système de $m+1$ équations dans $n+1$ inconnues

$$\begin{cases} g_i(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ 1 - Yf(X_1, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

$\nexists$ solutions : Si $(a_1, \dots, a_n, b)$ est une solution des premières m équations $g_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall i$

Alors $\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{k^n} \in \mathbb{V}(g_1, \dots, g_m) = \mathbb{V}(\mathfrak{a})$

$\Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = 0$

$\Rightarrow 1 - bf(a_1, \dots, a_n) = 1 \neq 0 \quad \forall b.$

- On vient de voir que pour $\mathfrak{b} = (g_1, \dots, g_m, 1 - Yf)$ $\subseteq k[X_1, \dots, X_n, Y]$

on a $\mathbb{V}(\mathfrak{b}) = \emptyset$

$\Rightarrow$ Par la première version de la théorème des zéros

$$\mathfrak{b} = k[X_1, \dots, X_n, Y] \ni 1.$$

$\Rightarrow \exists f_1, \dots, f_{m+1} \in k[X_1, \dots, X_n, Y]$ t.q.

$$1 = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i + f_{m+1}(1 - Yf) \quad (*)$$

Considérons l'homomorphisme

$$\varphi : k[X_1, \dots, X_n, Y] \longrightarrow k(X_1, \dots, X_n)$$
$$X_i \longmapsto X_i$$
$$Y \longmapsto 1/f$$

On applique φ à $(*)$.

$$1 = \sum_{i=1}^{m} f_i(X_1, \dots, X_n, \tfrac{1}{f})\, g_i(X_1, \dots, X_n) \quad (**)$$

$$+ f_{m+1}(X_1, \dots, X_n, \tfrac{1}{f})\cancel{(1 - \tfrac{1}{f} f)} = 0$$

pour chaque $i = 1, \dots, m$, $\exists N_i \gg 0$ t.q.

$$f^{N_i} f_i(X_1, \dots, X_n, \tfrac{1}{f}) \in k[X_1, \dots, X_n]$$

Soit $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$.

On multiplie (**) par f^N :

$$f^N = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{f^N f_i(X_1, \dots, X_n, \tfrac{1}{f})}_{\in k[X_1, \dots, X_n]} \underbrace{g_i(X_1, \dots, X_n)}_{\in \mathfrak{a}}$$

$\Rightarrow f^N \in \mathfrak{a}$ comme voulu. $\square$

<u>Corollaire</u> V, I donnent des bijections inverses qui sont des inversions d'ordre

$$\left\{\begin{matrix}\text{idéaux} \\ \text{radicels de} \\ k[X_1, \dots, X_n]\end{matrix}\right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{ensembles} \\ \text{algébriques de} \\ k^n\end{matrix}\right\}$$

<u>Exemple</u>

$$\left\{\begin{matrix}\text{idéaux} \\ \text{maxim.}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ensembles} \\ \text{non-vides} \\ \text{minimaux}\end{matrix}\right\}$$

$$\mathfrak{m}_p \longleftrightarrow \{p\}$$

Corollaire Soit $\mathfrak{a} \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$ un idéal.

Posons $\Sigma = \left\{ \mathfrak{m} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathfrak{m} \text{ est maximal} \\ \text{et } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \end{array} \right\}$

Alors

$$\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Sigma} \mathfrak{m}$$

this is the 1st time we compute sth alg. using sth geom.

Démo. Strategy:

on va demontre les deux faits suivants:

(I) $\Sigma = \{ \mathfrak{m}_p \mid p \in V(\mathfrak{a}) \}$

(II) $\bigcap_{p \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{m}_p = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$

(I) $\mathfrak{m} \in \Sigma \iff \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$ pour un certaine $p \in k^n$.

$f \in \mathfrak{m}_p \iff f(p) = 0$

$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_p \iff f(p) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{a}$

$\iff p \in V(\mathfrak{a})$

(II) $f \in \bigcap_{p \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{m}_p \iff f(p) = 0 \quad \forall p \in V(\mathfrak{a})$

$\iff f \in I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \quad \square$

Exemple Soient $W, W' \subseteq k^n$ algébriques

- $W \cap W'$ est maximal parmi les ensembles algébriques contenus dans W et W'

Hilroy

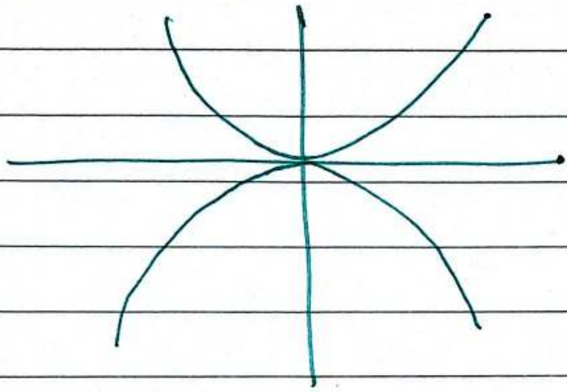
$\Longrightarrow I($

$\Rightarrow I(W \cap W')$ est minimal parmi les idéaux radicaux ~~contenant~~ contenant $I(W)$ et $I(W')$

$\Rightarrow I(W \cap W') = \mathrm{rad}(I(W) + I(W'))$

Exemple de l'exemple $W = V(X^2 - Y)$, $W' = V(X^2 + Y)$ $\subseteq k[X, Y]$

avec $\mathrm{char}(k) \neq 2$.



$W \cap W' = \{(0,0)\}$ método directo

$\Rightarrow I(W \cap W') = (X, Y)$

Comparer $(X^2 - Y), (X^2 + Y)$ sont premiers et donc radicaux (exercice)

On a...

$I(W) = (X^2 - Y)$

cálculo alternativo

$I(W') = (X^2 + Y)$

$\Rightarrow I(W) + I(W') = (X^2, Y)$

$\Rightarrow \mathrm{rad}\big(I(W) + I(W')\big) = (X, Y)$

(même réponse)

Hilroy

#2025-09-26

Rappel

- $I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$

- $\mathfrak{a}$ radiciel $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$

Lemme $\mathfrak{a}$ est radiciel $\Leftrightarrow$ $\underbrace{A/\mathfrak{a} \text{ est réduit}}_{\text{aucun élément nilpotent sauf } 0.}$

Demo : exercise

Exemple Les anneaux intègres sont réduits

Soit $\mathfrak{p} \subseteq A$ premier $\Leftrightarrow$ $A/\mathfrak{p}$ intègre et donc réduit

$\Rightarrow \mathfrak{p}$ est radiciel.

Lemme. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont radiciels, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ l'est aussi mais pas nécessairement $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$

Demo Soit $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ avec $f^r \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

$\Rightarrow f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ et $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \Rightarrow f \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Alors $\mathrm{rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

$\boxed{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \text{ n'est pas nec. radiciel}}$ Soient $\mathfrak{a} = (X^2 - Y)$,

$\mathfrak{b} = (Y + X^2) \subseteq k[X, Y]$ premiers et donc radiciels.

Mais $X^2 = \frac{1}{2}(X^2 + Y) + \frac{1}{2}(X^2 - Y) \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$

(si $\mathrm{char}(k) \neq 2$)

Alors $X \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$

mais $X \notin \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ n'est pas radiciel. $\square$

<u>Exemple</u> Soit $J = (X^2+Y^2+Z^2, XY+XZ+YZ)$

$\subseteq \mathbb{C}[X,Y,Z]$

Trouver $\mathrm{rad}(J)$ $\left(= I(V(J))\right)$

Notons: $(X+Y+Z)^2 = \overbrace{X^2+Y^2+Z^2}^{\in J}$

① $+ 2\underbrace{(XY+XZ+YZ)}_{\in J} \in J$

donc $X+Y+Z \in \mathrm{rad}(J)$.

② $X(X+Y+Z)-(XY+XZ+YZ) = X^2-YZ \in \mathrm{rad}(J)$

On prétend que $\tilde{J} := (X+Y+Z, X^2-YZ) = \mathrm{rad}(J)$

On sait que $\tilde{J} \subseteq \mathrm{rad}(J)$

" $\supseteq$ " $J \subseteq \tilde{J}$ car

② $\Rightarrow XY+XZ+YZ \in \tilde{J}$

① $\Rightarrow X^2+Y^2+Z^2 \in \tilde{J}$

$\Rightarrow \mathrm{rad}(J) \subseteq \mathrm{rad}(\tilde{J}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathrm{rad}(J)) = \mathrm{rad}(J)$

Donc il reste à démontrer que $\tilde{J}$ est radiciel.

Considérons l'homomorphisme $\dfrac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{(X+Y+Z,\ X^2-YZ)} \xrightarrow{\sim} \dfrac{\mathbb{C}[Y,Z]}{(Y^2+YZ+Z^2)}$

$$\left((-Y-Z)^2 - YZ = Y^2+YZ+Z^2 \right)$$

donné par

$$X \longmapsto -Y-Z$$

$$Y \longmapsto Y$$

$$Z \longmapsto Z$$

on sait que

$\dfrac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{(X+Y+Z,\ X^2-YZ)}$ est intègre et donc reduit

donc $\tilde{J}$ est radiciel.

$\dfrac{\mathbb{C}[Y,Z]}{(Y^2+YZ+Z^2)}$ intègre car Y^2+YZ+Z^2 est irréductible.

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{sous-ensembles}\\ \text{fermés de } \mathbb{A}^n\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{idéaux radiciels}\\ \text{de } k[X_1,\dots,X_n]\end{array}\right\} \\
 \cup\!\shortmid & \text{inverse l'ordre} & \cup\!\shortmid \\
\left\{\begin{array}{c}\text{sous-ensembles}\\ \text{fermés de } V,\\ W\subseteq V\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{idéaux radiciels qui}\\ \text{contient } I(V)\end{array}\right\}
\end{array}$$

Consequence Soit $W \subseteq V$ quelconque

$$W \subseteq V(I(W)) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$$

Si $W \subseteq V(\mathfrak{a}) \subseteq V(I(W))$ alors

$$I(W) \supseteq I(V(\mathfrak{a})) \supseteq I(V(I(W))) = I(W)$$

$$\therefore\ I(W) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$$

et donc $V(\mathfrak{a}) = V(I(W))$

c-a-d: $V(I(W))$ est minimal parmi les ensembles algébriques qui contient W

$\Longleftrightarrow V(I(W)) = \overline{W}$, l'adherence [closure] de W dans la topologie de Zariski.

Proposition Soit $V \subseteq \mathbb{A}^n$ algébrique

(a) Chaque $p \in V$ est fermé (V est un espace T_1)

(b) Chaque suite croissante de sous-ensembles ouverts de V devient éventullement constante (V est un espace Noethérien)

(b') Chaque suite decroissante de sous-ensembles fermés de V devient constant.

(c) Chaque ~~recouvrim~~ recouvrement ouvert de V admet un sous recouvrement fini (V est quasi-compact)

Hilroy

Démonstration exercises
- a
- b
- b' $\Leftrightarrow$ b

(c) On va démontrer un fait général...

$\circledast$ chaque espace noethérien X est quasi-compact

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X.

Soit $\Sigma = \left\{ W \subseteq X \;\middle|\; W = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} U \text{ pour } \underset{\text{fini}}{\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}} \right\}$

Si $X \notin \Sigma$, on peut construire une chaîne croissante infinie dans Σ

$\#$ X es noethérien $\square$

En général, un sous-ensemble ouvert d'un espace quasi-compact n'est pas (plus ?) quasi-compact.

MAIS un sous-ensemble ouvert d'un espace noethérien est ~~e~~ encore noethérien, et donc quasi-compact.

Définition. Un espace topologique X est irréductible si on ne peut pas l'écrire comme union

$$X = X_1 \cup X_2$$

de deux sous-espaces $X_1, X_2 \subseteq X$ propres et fermés.

<u>Convention</u> $\emptyset$ n'est pas irréductible.
(comme 1 n'est pas premier)

<u>Exemple</u> $\boxed{\mathbb{A}^1}$ Supposons que $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}^1$ son fermés

X_1, X_2 sont finis

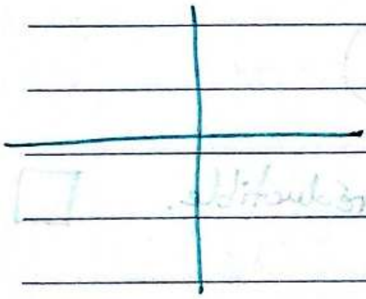
mais $\mathbb{A}^1$ est infini

$\therefore \quad \mathbb{A}^1 \neq X_1 \cup X_2$

$\Rightarrow \mathbb{A}^1$ est irréductible.

<u>Exemple</u> $V = V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$

$= V(X) \cup V(Y)$ réductible



$\leftarrow$ design des zéros de XY
i.e. de V.

<u>Proposition.</u> Un ensemble algébrique $W \subseteq \mathbb{A}^n$ est irréductible

$\Longleftrightarrow I(W)$ est premier

"Ce prop. est satisfasant"

<u>Démo.</u> "$\Rightarrow$" Supposons que $I(W)$ n'est pas premier

$\exists f_1, f_2 \notin I(W)$ t.q. $f_1 f_2 \in I(W)$

pour $i=1,2$:

$$I(W) \subsetneq (I(W), f_i) \subseteq \operatorname{rad}(I(W), f_i)$$

$$\Rightarrow W = V(I(W)) \supsetneq V(I(W), f_i)$$

fermé propre.

$$\Rightarrow W \supseteq V(I(W), f_1) \cup V(I(W), f_2)$$

Par contre, $f_1, f_2 \in I(W)$

$\Rightarrow \forall p \in W, \quad f_1(p) f_2(p) = 0$

$\Rightarrow \forall p \in W$, soit $f_1(p) = 0$, soit $f_2(p) = 0$

$\Rightarrow \forall p \in W$, soit $p \in V(I(W), f_1)$, soit $p \in V(I(W), f_2)$

$\therefore \; W \subseteq V(I(W), f_1) \cup V(I(W), f_2)$

et donc ils sont égaux et W est réductible. $\square$

"$\Leftarrow$" Supposons que $I(W)$ est premier, et que

$$W = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \text{ avec } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$$

radicaux

et $V(\mathfrak{a}) \subsetneq W$

on doit démontrer que $V(\mathfrak{b}) = W$.

Hilroy

Traduction $I(W) = I(V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}))$

$= I(V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}))$

$= \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ comme $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est radical.

$I(W) \subsetneq \mathfrak{a}$

$I(W) \subseteq \mathfrak{b}$ et on.v.m.q. $I(W) = \mathfrak{b}$.

Fixons $f \in \mathfrak{a} \setminus I(W)$.

$\forall g \in \mathfrak{b}$, $fg \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = I(W)$

Comme $I(W)$ est premier, il faut que $g \in I(W)$.

Donc $\mathfrak{b} \subseteq I(W)$ comme voulu. $\square$

—— // —— // ——

$\{$ idéaux radiciels $\} \longleftrightarrow \{$ ensembles algébriques $\}$

$\cup\!\!\mid \qquad\qquad \cup\!\!\mid$

$\{$ idéaux premiers $\} \longleftrightarrow \{$ ensembles irréductibles $\}$

$\cup\!\!\mid \qquad\qquad \cup\!\!\mid$

$\{$ idéaux maximaux $\} \longleftrightarrow \{$ points $\}$

PROCHAIN BUT décomposer les ensembles réductibles

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$$

Exemple Soit $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ et considerons $V(f)$

(*) on prétend que $k[X_1, \dots, X_n]$ est factoriel

$\Longrightarrow f = \prod_i f_i^{m_i}$ avec f_i irréductibles et distincts.

(**) on prétend que f_i est irréductible $\Leftrightarrow$ f_i est premier.

$\Longrightarrow p_i = (f_i)$ est un idéal premier

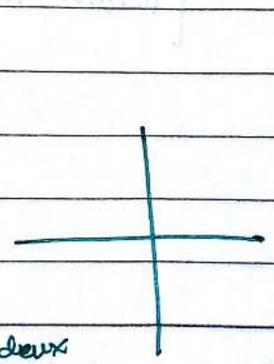
$\Longrightarrow V(p_i) = V(f_i)$ est irréductible.

Alors
$$(f) = \prod (f_i^{m_i})$$

$$\Rightarrow \mathrm{rad}(f) = \bigcap \mathrm{rad}(f_i^{m_i}) = \bigcap \mathrm{rad}(f_i) = \bigcap (f_i)$$

$$\Rightarrow V(f) = \bigcup \underbrace{V(f_i)}_{\text{ensembles irréductibles}}$$

Ex $V(XY) = V(X) \cup V(Y)$



c'est la union de deux lignes.

#2025-10-03 [Vendredi] [teams]

BUT

On veut décomposer

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \quad \text{avec } X_i \text{ irréductibles.}$$

Exemple $V(f)$ pour $f \in k[X_1, \dots, X_n]$

Si (*) $k[X_1, \dots, X_n]$ est factoriel

et (**) un polynôme irréductible est premier,

alors $f = \prod_i f_i^{m_i}$ avec f_i irréductible (et donc premier)

et $V(f) = \bigcup_i V(f_i)$ avec $V(f_i)$ irréductible.

BUT Démontrer (*) et (**)

Rappel/définitions Soit A un anneau intègre et $a \in A$ t.q. $a \neq 0$ et $a \notin A^\times$.

(1) $a \in A$ est premier

si $a | bc$, alors $a | b$ ou $a | c$

(2) $a \in A$ est irréductible si a ne s'écrit pas comme produit de deux éléments non-inversibles

$$a = bc \implies \text{soit } b \in A^\times \text{ ou } c \in A^\times$$

Remarque Quand $A = \mathbb{Z}$, a premier $\Longleftrightarrow$ a irréductible.

Proposition Soit A intègre et $a \in A$ premier. Alors

$$a \text{ est irréductible.}$$

la otra dirección siempre es verdad ?

Démonstration. Supposons que $a = bc$.

En particulier $a \mid bc$ et donc comme a est premier,

$$a \mid b \text{ ou } a \mid c.$$

Sans perte de généralité, supposons que $a \mid b$. Donc

$$\exists q \in A \text{ t.q. } b = aq$$

$$\therefore a = bc = (aq)c = a(qc)$$

$$\Longrightarrow a(1 - qc) = 0$$

Comme A est intègre et $a \neq 0$, il suit que $1 - qc = 0$.

C-a-d, $1 = qc$ d'où c est inversible. $\square$

Exemple $A = \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$

$$= \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid f(0) \in \mathbb{Q} \}$$

- $X \in A$ est irréductible
- $X \mid (\sqrt{2}X)^2 = 2X^2$ dans A : $2X^2 = \underbrace{X}_{\in A}\underbrace{(2X)}_{\in A}$

mais $X \nmid \sqrt{2}X$ car $\sqrt{2} \notin A$

Donc X n'est pas premier.

Proposition. Soit A un anneau factoriel et $a \in A$. Alors

a est irréductible $\Longleftrightarrow$ a est premier.

Demo "$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$" Supposons que a est irréductible et que $a \mid bc$.

Sup. que $a \nmid b$. On doit montrer que $a \mid c$.

- $\exists q$ t.q. $bc = aq$
- A factoriel $\Rightarrow$ on écrit $\left.\begin{array}{l} b = b_1 \cdots b_n \\ c = c_1 \cdots c_m \\ q = q_1 \cdots q_\ell \end{array}\right\}$ produits d'éléments irréductibles.

$\therefore$ $b_1 \cdots b_n c_1 \cdots c_m$ et $a q_1 \cdots q_\ell$ donnent deux factorisations du même élément de A.

Par l'unicité des factorizations et comme $a \nmid b$, il ~~suffit~~ faut que $a = u c_i$ pour un $i \in \{1, \dots, m\}$ et $u \in A^\times$

$$\Longrightarrow a \mid c = c_1 \cdots c_m \quad \text{come voulu} \qquad \square$$

Alors $(*) \Rightarrow (**)$

Vers $(*)$: On va classifier les éléments irréductibles de $A[X]$.

Définition. Soit A factoriel et $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \neq 0$ dans $A[X]$.

- f est primitif si les coefficients $\{a_0, \dots, a_m\}$ n'ont aucun facteur non-inversible en commun.

- f s'écrit dans la forme $f = c(f) \cdot f_p$ où
    - $c(f) \in A$ est ~~le~~ un plus grand diviseur commun des $\{a_i\}$ (unique à multiplication par $A^\times$)
    - $f_p \in A[X]$ est primitif

  → on appelle $c(f)$ le contenu de f.

Exemple. $f(X) = 15 + 6X + 9X^2 = \underset{c(f)}{3}\underbrace{(5 + 2X + 3X^2)}_{\text{primitif}} \in \mathbb{Z}[X]$

Lemme (exercice) Le produit de deux polynômes primitives est primitif.

Proposition Soit A factoriel

- Pour $f, g \in A[X]$, on a $c(fg) = c(f)c(g)$
- En particulier, si $h \in A[X]$ est primitif, chacun de ses facteurs l'est aussi.

Démonstration. Ecrivons $f = c(f) f_p$ et $g = c(g) g_p$ avec f_p, g_p primitifs

- Alors $fg = \underbrace{c(f)\,c(g)}_{= c(fg)}\,\underbrace{f_p g_p}$ ← primitif par le lemme.
- Si h est primitif et $h = fg$, alors $\underset{=1}{c(h)} = c(f)c(g)$

$\Longrightarrow c(f), c(g) \in A^\times$

$\Longrightarrow f, g$ sont primitifs

$\therefore$ tous les facteurs de h sont primitifs $\square$

Corollaire. Soit A factoriel avec corps de fractions F.

Si $f, g \in A[X]$ et $f | g$ dans $F[X]$, alors $f | g$ dans $A[X]$ aussi.

Démo. On peut écrire $g = fr$ avec $r \in F[X]$ mais on aimerait que $r \in A[X]$.

$\exists\, a \in A$ t.q. $dr \in A[X]$

On choisit d minimal : $c(dr) = 1$ et dr est primitif.
(?)

$\Longrightarrow dg = f(dr)$ dans $A[X]$.

Hmmm il y a un erreur. ... à continuer !!.

Proposition. Les éléments irréductibles de $A[X]$ sont exactement :

(I) les éléments irréductibles de A (vus comme polynômes const.)

(II) les polynômes primitifs $f \in A[X]$ qui sont irréductibles dans $F[X]$.

Démo. (I) Soit $a \in A$ et $f = a \in A[X]$.

Si $f = g_1 g_2$, $\deg(f) = \deg(g_1) + \deg(g_2)$

mais $\deg(f) = 0$, alors g_1, g_2 sont constantes.

f est irréductible dans $A[X] \Longleftrightarrow a$ est irréductible dans A.

(II) Soit $f \in A[X]$ non-constant.

f est réductible $\Longleftrightarrow f = gh$ avec $g, h \in A[X]$ non-inversibles

- si g, h ne sont pas constants, alors f est réductible aussi dans $F[X]$.

- si un de g ou h est constant, disons $g = a \in A^\times$ alors

$a \mid c(f)$ et donc f n'est pas primitif. $\square$

<u>Théorème.</u> Si A est un anneau factoriel alors $A[X]$ l'est aussi.

<u>idée de la preuve.</u> Soit $f = c(f) f_p \in A[X]$

- $c(f) \in A$ s'écrit (uniquement à ordre et éléments inversibles près) comme produit d'irreducibles dans A

$$c(f) = a_1 \cdots a_r$$

- f_p s'écrit comme produit de polynômes irréductibles et primitifs

$$f_p = g_1 g_2 \qquad (\text{avec } \deg(g_1) + \deg(g_2) = \deg(f_p))$$

$$= (h_1 h_2)(k_1 k_2) \quad \Rightarrow \quad \deg(g_i) < \deg(f_p)$$

$$\vdots$$

$$= p_1 \cdots p_s \qquad \text{avec } s \leq \deg(f_p) \text{ et } p_i \text{ irréductible.}$$

~~Note~~ La procédé doit terminer par raison de degré.

On obtient $f = c(f) f_p = (a_1 \cdots a_r)(p_1 \cdots p_s)$, un produit d'éléments irréductibles de $A[X]$. Il reste à demontrer que c'est unique $\square$

particularités de langue français Quebecois

Corollaire. Si A est un anneau factoriel, alors $A[X_1, \dots, X_n]$ l'est aussi

Demonstration. Récurrence sur n, en utilisant que

$$A[X_1, \dots, X_{n-1}, X_n] = A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n] \qquad \square$$

Donc c'est vrai que pour $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, on peut écrire

$$f = \prod_i^N f_i^{m_i} \text{ avec } f_i \text{ premier}$$

et on a $\mathbb{V}(f) = \bigcup_i^N \mathbb{V}(f_i)$ avec $\mathbb{V}(f_i)$ irréductibles.

On aimerait généraliser : pour $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ radiciel

peut-on écrire $\mathbb{V}(\mathfrak{a}) = \bigcup_i \mathbb{V}(p_i)$?

irréductible $\Leftrightarrow$ p_i est premier

Deux choses à mieux comprendre

1) idéaux premiers des anneaux factoriels

2) les décompositions des espaces réductibles

Hilroy

2025-10-07

<u>Corollaire.</u> Soit A factoriel avec corps de fractions F.
Soient $f, g \in A[X]$, avec f primitif.

Si $f | g$ dans $F[X]$, alor $f|g$ dans $A[X]$

$$\left(2X \,|\, X \text{ dans } F[X] \text{ mais pas } A[X] \right)$$

<u>Démo.</u> On a $g = fr$ avec $r \in F[X]$.
On choisit $d \in A$ minimal t.q. $dr \in A[X]$

$$\Longrightarrow \text{p.g.d.c.}\left(d, c(dr)\right) = 1$$

dans $A[X]$:

$$dg = f(dr)$$

$$\Longrightarrow d\,c(g) = \cancel{c(f)}^{1}\, c(dr) \in A$$

$$= c(dr)$$

$$\Longrightarrow \text{p.g.d.c}\left(d, c(dr)\right) = d$$

$$\Longrightarrow d \in A^{\times}.$$

en particulier

$$r = \underbrace{d^{-1}}_{\in A} \cdot \overbrace{(dr)}^{\in A[X]} \in A[X]$$

$\square$

<u>Rappel.</u> Un espace topologique W est irréductible si

$$W = W_1 \cup W_2 \text{ avec } W_i \text{ fermes}$$

$$\Longrightarrow W_1 = W \text{ ou } W_2 = W.$$

Lemme (exercice). Soit W irréductible.

Si $W_i \subseteq W$ fermés sont t.q.

$$W = W_1 \cup \dots \cup W_k$$

alors $\exists_i$ t.q. $W_i = W$

Proposition. Soit V un espace noethérien. Alors on peut écrire

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_m \qquad (*)$$

une union finie d'ensembles fermés et irréductibles t.q.

$$i \neq j \Longrightarrow V_i \nsubseteq V_j$$

Les V_i sont uniquement déterminés à ordre près.

Déf. Les V_i sont les composantes irréductibles de V

(ils sont exactement les sous-ensembles fermés irréductibles maximaux de V, exercice!)

Démo. Supposons que V n'admet pas une décomposition $(*)$

Soit $\Sigma = \{ W \subseteq V \mid W$ fermés, non-vide n'admet pas $(*)\}$

$V \in \Sigma \Rightarrow \Sigma \neq \emptyset$

$\underset{V \text{ noeth}}{\Longrightarrow}$ Σ admet un élément minimal disons W.

W n'est pas irréductible (sinon $W = W$ (*))

On peut écrire $W = W_1 \cup W_2$ avec W_i fermés $W_i \subsetneq W$.

W minimal $\Rightarrow W_i \notin \Sigma$

$\Rightarrow$ on peut écrire

$$W_1 = V_1 \cup \dots \cup V_r$$

$$W_2 = V_1' \cup \dots \cup V_s'$$

avec V_i, V_i' fermés, irréductibles.

$$V_i \nsubseteq V_j \quad , \quad V_i' \nsubseteq V_j'$$

$\Rightarrow W = (V_1 \cup \dots \cup V_r) \cup (V_1' \cup \dots \cup V_s')$

Si $V_i \subseteq V_j'$ enlève V_i

$V_i' \subseteq V_j$ enlève V_i'

$\Longrightarrow$ W admet une ~~décomposition~~ description (*)

$\#\, W \in \Sigma$

$\therefore \Sigma = \emptyset$ et V admet (*)

Unicité. supposons qu'on a une deuxième

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_r = W_1 \cup \cdots \cup W_s$$

Pour $i = 1, \ldots, r$,

$$V_i = V_i \cap V = \bigcup_{j=1}^{s} (V_i \cap W_j)$$

Mais V_i est irréductible

$$\Longrightarrow \exists j_i \text{ t.q. } V_i = V_i \cap W_{j_i}$$

$$\Longrightarrow V_i \subseteq W_{j_i}$$

On obtient une fonction

$$f : \{1, \ldots, r\} \longrightarrow \{1, \ldots, s\} \text{ t.q.}$$

$$\forall i : V_i \subseteq W_{f(i)}$$

De même

$$g : \{1, \ldots, s\} \longrightarrow \{1, \ldots, r\} \text{ t.q.}$$

$$\forall j : W_j \subseteq V_{g(j)}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$ on a

$$V_i \subseteq W_{f(i)} \subseteq V_{g(f(i))}$$

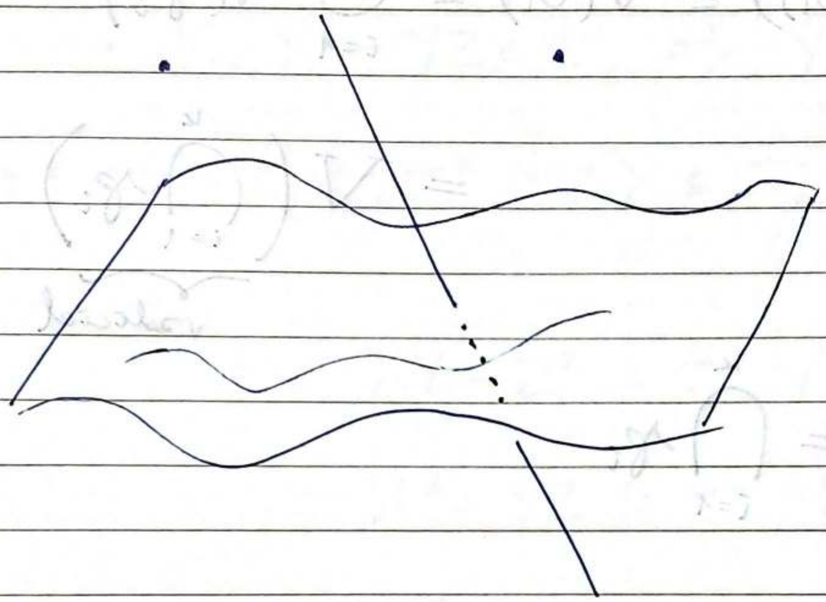
$$\Longrightarrow i = g \circ f(i) \text{ et } V_i = W_{f(i)} = V_i$$

De même, $(f \circ g)(j) = j$ et

$$W_j = V_{g(j)}$$

f ~~et~~ et g sont des bijections $(r=s)$

et les décompositions diffèrent seulement en ordre $\square$



4 composantes irréductibles.

<u>Corollaire.</u> Soit $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ un idéal

Alors $\exists \, \mathfrak{p}_i \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ premiers

avec $\mathfrak{p}_i \nsubseteq \mathfrak{p}_j$ pour $i \neq j$

t.q. $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_k$

Les idéaux $\mathfrak{p}_i$ sont uniques à ordre près.

Ils sont les idéaux premiers minimaux contenant $\mathfrak{a}$.

Démo. On écrit $V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$

union de ses ~~component~~ composantes irréductibles.

$\Longrightarrow \mathfrak{p}_i = I(V_i)$ sont premiers

et $V(\mathrm{rad}(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{k} V(\mathfrak{p}_i)$

$$= V\Big(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i}_{\text{radiciel}}\Big)$$

$\Longrightarrow \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i$ $\square$

! on utilise la topologie de $V(\mathfrak{a})$ pour comprendre $\mathrm{rad}(\mathfrak{a})$.

Exemple Trouvons les composantes irréductibles de $V(J)$ où

$$J = \langle XY - Z^2,\ X^3 - YZ \rangle \subseteq k[X,Y,Z]$$

Remarque J n'est pas premier.

$$X(Y^2 - X^2Z) = XY^2 - X^3Z$$
$$= XY^2 - Z^2Y + Z^2Y - X^3Z$$
$$= Y(XY - Z^2) - Z(X^3 - YZ) \in J$$

mais $X,\ Y^2 - X^2Z \notin J$

$$\Longrightarrow \quad V(J) = V(\underbrace{J, X}_{I_1}) \cup V(\underbrace{J, Y^2 - X^2 Z}_{I_2})$$

comme dans la preuve

$$V(I_1) = ?$$

$$I_1 = \langle XY - Z^2, X^3 - YZ, X \rangle$$

- $X, XY - Z^2 \in I_1 \Rightarrow Z^2 \in I_1$
- $X, X^3 - YZ \in I_1 \Rightarrow YZ \in I_1$

$$\Rightarrow \tilde{I} := \langle X, Z^2, YZ \rangle \subseteq I_1$$

Mais aussi :

$$\left.\begin{array}{l} XY - Z^2 \in \tilde{I} \\ X^3 - YZ \in \tilde{I} \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 \subseteq \tilde{I}$$

$$\therefore I_1 = \tilde{I}$$

Donc

$$V(I_1) = V(\tilde{I}) = V(\mathrm{rad}(\tilde{I})) = V(X, Z)$$

$$\Longrightarrow V(I_1) = \{(x,y,z) \mid x = z = 0\}$$

$$\cong \{y\} = \mathbb{A}^1 \quad \text{irréductible!}$$

- $V(I_2)$ où $I_2 = \langle XY - Z^2, X^3 - YZ, Y^2 - X^2 Z \rangle$

Ici on outilise un astuce different.

$$V(I_2) = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{ll} z^2 = xy & ① \\ x^3 = yz & ② \\ y^2 = x^2 z & ③ \end{array} \right\}$$

Hilroy

Astuce : Soit $C = \{(t^3, t^5, t^4) \in k^3 \mid t \in k\}$

courbe paramétrisée dans le sens d'un cours de calcul

Lemme " $C \subseteq V(I_2)$ " ~~Voilà~~.

Si $p = (t^3, t^5, t^4) \in C$:

- $z^2 = t^8 = xy = t^3 t^5$ ✓
- $x^3 = t^9 = yz = t^5 t^4$ ✓
- $y^2 = t^{10} = x^2 z = t^6 t^4$ ✓

$\Longrightarrow p \in V(I_2)$

$\therefore C \subseteq V(I_2)$

" $V(I_2) \subseteq C$ "

- Si $p = (x, y, z) \in V(I_2)$. Si $x = 0$, il faut que $y = z = 0$ aussi ① et ③

$p = (0,0,0) = (0^3, 0^5, 0^4) \in C$

- Si $x \neq 0$, $y, z \neq 0$ aussi ②

Possons $t = \frac{z}{x} \overset{①}{=} \frac{y}{z}$

$t^2 = \frac{z}{x} \cdot \frac{y}{z} = \frac{y}{x} \Longrightarrow t^4 = \frac{y^2}{x^2} = z$ par ③

$$\cancel{t^3 = t^4 \cdot \frac{1}{z}} \quad t^3 = t^4 \cdot \frac{1}{t} = z \cdot \frac{x}{z} = x$$

$$t^5 = t^4 \cdot t = z \cdot \frac{y}{z} = y$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (t^3, t^5, t^4) \in C$$

$\square$.

Alors

$$\mathbb{V}(I_2) = C.$$

On prétend que C est irréductible

· Supposons (vers une contradiction) qu'on a

$$C = C_1 \cup C_2 \quad \text{avec } C_i \subsetneq C$$

$$\Rightarrow I(C) \subsetneq I(C_i) \text{ et on peut choisir}$$

$$f_i \in I(C_i) \setminus I(C)$$

$$f_1 f_2 \in I(C_1) \cap I(C_2)$$

$\forall p \in C$: $p \in C_1$ ou $p \in C_2$

au moins un entre $f_1(p)$ et $f_2(p)$ est 0.

On $P = (t^3, t^5, t^4)$

$$\Rightarrow f_i(P) = f_i(t^3, t^5, t^4) = F_i(t)$$

pour $F_i \in k[T]$ et pour $\forall t$,

au moins un entre $F_1(t)$ et $F_2(t)$ est 0.

Comme il y a un choix infini de t,

au moins un parmi F_1 et F_2 a un nombre infini de racines

$\Rightarrow$ il est nul $F_i = 0$

$\Rightarrow f_i(p) = 0 \quad \forall p \in C$

$\Rightarrow f_i = 0 \quad \in I(C)$

#

Conclusion

$$V(J) = V(I) \cup C$$

droite   2 composant irred.

2025-10-10

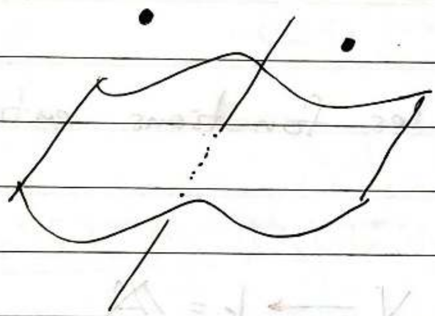
Def Un espace topologique X est connexe s'il ne s'écrit pas comme union de deux fermés non vides disjoints.

$$X \neq X_1 \sqcup X_2$$

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset$$

Remarque • irréductible $\Longrightarrow$ connexe

• conexe $\not\Longrightarrow$ irréductible



3 composantes connexes.

On parle aussi des composantes connexes d'un ensemble algébrique V:

$$V = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_n \quad \text{avec } C_i \text{ connexe}$$

fini car V est noetherien.

$$(V_{11} \cup V_{12} \cup \cdots \cup V_{1k_1}) \sqcup \cdots$$

$$\cdots \sqcup (V_{n1} \cup \cdots \cup V_{nk_n})$$

Prop. Un ensemble algébrique $V \subseteq \mathbb{A}^n$ est non-connexe

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ t.q.

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = I(V) \text{ et } \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = k[X_1, \ldots, X_n]$$

Demo. $V = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ avec $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ radiciels

$$\Longleftrightarrow V = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \text{ et } V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = \emptyset$$

$$= V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \qquad \qquad // \qquad$$

$$\Updownarrow \qquad \qquad V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$$

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = I(V) \qquad \qquad \Updownarrow \text{ thm 0 Hilbert}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = k[X_1, \dots, X_n]$$

—— // —— $\square$

BUT On veut comprendre les fonctions entre ensembles algébriques

Étape 1 Les fonctions $V \longrightarrow k = \mathbb{A}^1_k$

Exemple (désiré) $V = k = \mathbb{A}^1 \longrightarrow k[X]$

Exemple $V = \mathbb{A}^n \rightsquigarrow k[X_1, \dots, X_n]$

Soit $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un ensemble algébrique avec $I(V)$

$$I(V) = \mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$$

Définition. L'anneau de coordonnés de V est

$$k[V] := k[X_1, \dots, X_n] / \mathfrak{a}$$

c'est une k-algèbre $\left(\begin{array}{l} i : k \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n] \\ \xrightarrow[\pi]{} k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \end{array} \right.$

finiment engendrée (par $\{\pi(X_i) = X_i + \mathfrak{a}\}_{i=1}^{n}$

réduit (car $\mathfrak{a}$ est radical

$$f^n + \mathfrak{a} = 0 \iff f + \mathfrak{a} = 0)$$

et pas nécessairement intègre

(intégre $\iff$ $\mathfrak{a}$ est premier
$\iff$ V est irréductible)

CONSTRUCTION IMPORTANTE

Soit $\alpha \in k[V]$. On veut définir une fonction

$$\tilde{\alpha} : V \longrightarrow k$$

choisissons $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ t.q. $\alpha = f + \mathfrak{a}$

pour $p \in V$ on obtient $f(p) \in k$

Exercice (1) Si $f + \mathfrak{a} = g + \mathfrak{a} = \alpha$

alors

$$f(p) = g(p) \quad \forall p \in V$$

Donc on peut définir

$$\bar{\alpha} : V \longrightarrow k$$
$$p \longmapsto f(p)$$

On obtient $\widetilde{(\cdot)} : k[V] \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ V \to k \end{array} \right\}$

(2) Si $\alpha, \beta \in k[V]$ et $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, alors $\alpha = \beta$

~~(3)~~ $\iff$ $\widetilde{(\cdot)}$ est injective.

(3) $\widetilde{(\cdot)}$ est un homomorphisme de k-algèbres.

<u>Définition</u> Une fonction $f : V \to k$ est régulière sur V si elle est dans l'image de

$$\widetilde{(\cdot)} : \exists \alpha \in k[V] \text{ t.q. } f = \tilde{\alpha}$$

- les fonctions régulières forment une k-sous-algèbre

$$\tilde{\alpha} \in \operatorname{Im}\widetilde{(\cdot)} \subseteq \{ f : V \to k \}$$

$\wr\wr$ ← on traite comme "="

$\alpha \in k[V]$ $\qquad\qquad \alpha = \tilde{\alpha}$

<u>Exemple</u> $V = \mathbb{A}^n$, $\mathfrak{a} = (0)$

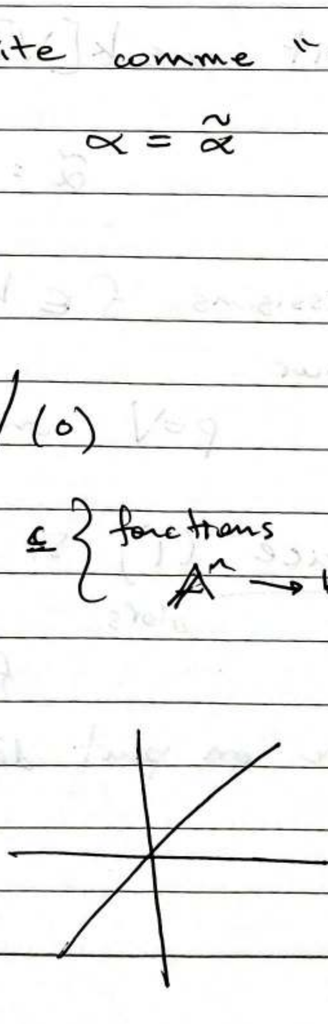
$$\Rightarrow k[V] := k[X_1, \dots, X_n]/(0)$$

$$= k[X_1, \dots, X_n] \subseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions} \\ \mathbb{A}^n \to k \end{array} \right\}$$

<u>Exemple</u> $\mathfrak{a} = \langle X - 2Y \rangle \subseteq k[X, Y]$

$$V = V(\mathfrak{a}) = \{ (x,y) \mid x = 2y \}$$

$$= \{ (2a, a) \mid a \in k \}$$



$$k[V] = \frac{k[X,Y]}{\langle X-2Y\rangle} \xrightarrow{\sim} k[Z]$$

$$X \longmapsto 2Z$$
$$Y \longmapsto Z$$
$$Y \longleftarrow\!\shortmid Z$$

<u>Notation</u> on écrit $x_i = \pi(X_i)$

fonction coordonée

$x_i : V \longrightarrow k$

$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto a_i$ générateurs de $k[V]$.

<u>Rappel</u> $\pi : k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} = k[V]$

nous donne une bijection.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{idéaux de} \\ k[X_1, \dots, X_n] \\ \text{contenant } \mathfrak{a} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{idéaux de } k[V] \right\}$$

$$\pi^{-1}(\mathfrak{b}) \longleftarrow \mathfrak{b}$$

$$I \longmapsto \pi(I)$$

<u>Notation/définition.</u> Pour $\mathfrak{b} \subseteq k[V]$ posons

$$\mathbb{V}(\mathfrak{b}) := \{ p \in V \mid \alpha(p) = 0 \ \forall \alpha \in \mathfrak{b} \}$$

(exercise) $= \mathbb{V}(\pi^{-1}(\mathfrak{b}))$ un ensemble algébrique.

EX : les bijections (*) préservent les propriétés :

- maximal
- premier
- radiciel

$\Rightarrow$ les sous-ensembles fermés de $V = V(\mathfrak{a})$ correspondent aux idéaux radiciels de $k[X_1, \dots, X_n]$ contenant $\mathfrak{a}$

(*) aux idéaux radiciels de $k[V]$

RÉSTRICTIONS DES FONCTIONS

Soit $V = V(\mathfrak{a})$

$$W = V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \quad \text{avec } \mathfrak{b} \subseteq k[V]$$
$$\| $$
$$V(\pi^{-1}(\mathfrak{b}))$$

La restriction donne :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{fonctions} \\ V \to k \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{fonctions} \\ W \to k \end{array} \right\}$$

$$\varphi \longmapsto \varphi / W$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \\ k[V] & \xrightarrow{?} & k[W] \\ \| & \tilde{\alpha}, \dashrightarrow \tilde{\alpha}/W & \| \\ k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} & & k[X_1, \dots, X_n]/\pi^{-1}(\mathfrak{b}) \\ & & \|\wr \text{ thm iso} \\ & & k[V]/\mathfrak{b} \end{array}$$

est-ce que c'est régulière ? OUI !

$\alpha = f + \sigma$

$\tilde{\alpha}(p) = f(p)$

$\tilde{\alpha}|_{W}(p) = f(p)$

$\parallel$

$\widetilde{f + \pi'(b)}$

$k[V] \longrightarrow k[W]$ est surjective.

$\Longrightarrow$ chaque fonction régulière sur W admet un prolongement régulier sur V (~~et~~ $\mathbb{A}^n$)

▼ Les fonctions régulières sur les ensembles ouverts sont plus compliquées !

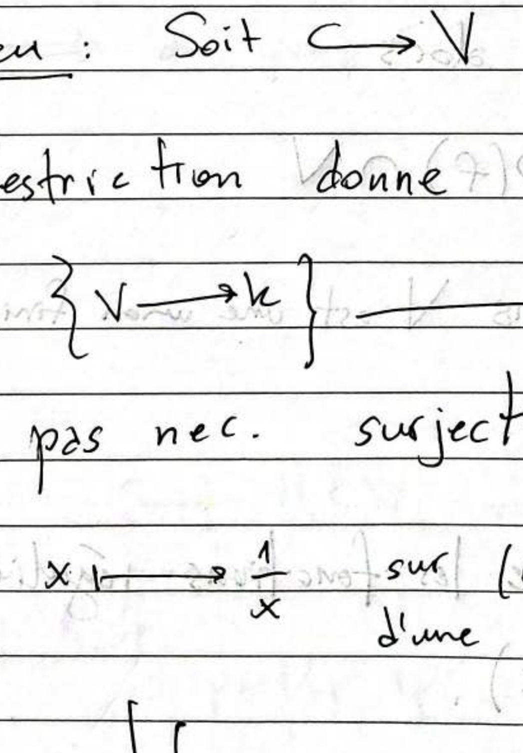
Enjeu : Soit $U \hookrightarrow V$ ouvert

Restriction donne

$$\{V \to k\} \longrightarrow \{U \to k\}$$

pas nec. surjective.

Ex $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $(0, +\infty)$ n'est pas la restriction d'une fonction continue sur $[0, +\infty)$



Rappel Les ensembles ouverts de $\mathbb{A}^n$ sont tous des unions finies des ensembles ouverts de base

Pour $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ $\quad D(f) = \mathbb{A}^n \setminus V(f)$

$$D(f) = \{ p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) \neq 0 \}$$

Notation/def Pour $\alpha \in k[V] = \dfrac{k[X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{a}}$

$V = V(\mathfrak{a})$

posons $D(\alpha) := \{ p \in V \mid \tilde{\alpha}(p) \neq 0 \}$
$= V \setminus V(\alpha)$

Ex Si $\alpha = f + \mathfrak{a}$, alors

$$D(\alpha) = D(f) \cap V$$

Ex chaque ouvert dans V est une union finie de $D(\alpha_i)$

BUT Définir/comprendre les fonctions régulières sur $D(f)$, $D(\alpha)$.

Hilroy

Observation 1. Soient $\alpha, \alpha' \in k[V]$.

$$D(\alpha) \subseteq D(\alpha') \iff V(\alpha') \subseteq V(\alpha)$$
$$\iff \text{rad}(\alpha) \subseteq \text{rad}(\alpha')$$
$$\iff \langle \alpha \rangle \subseteq \text{rad}(\alpha')$$
$$\iff \exists r > 0 \text{ t.q. } \alpha^r \in \langle \alpha' \rangle.$$

Lemme. $D(\alpha) \subseteq D(\alpha')$

$$\iff \exists r > 0 : \beta \in k[V] \text{ t.q. } \alpha^r = \alpha' \beta.$$

Observation 2. Soient $\alpha, \beta \in k[V]$.

Pour $P \in D(\beta)$, $\beta(P) \in k \setminus \{0\}$

$\implies$ on peut définir une fonction

$$D(\beta) \longrightarrow k$$
$$P \longmapsto \frac{\alpha(P)}{\beta(P)}$$

Déf. Soit $U \subseteq V$ ouvert et $\varphi : U \longrightarrow k$ une fonction.

Pour $p \in U$, φ est régulière au point P.

si

$$\exists \begin{cases} \beta \in k[V] \text{ avec } \beta(p) \neq 0 \\ \alpha \in k[V] \\ W \subseteq D(\beta) \text{ ouvert avec } P \in W \end{cases}$$

t.q. $\forall Q \in W$, on a

$$\varphi(Q) = \frac{\alpha(Q)}{\beta(Q)}$$

φ est régulière sur $\mathcal{U}$ si elle est régulière à P $\forall P \in \mathcal{U}$.

("es como ver la def ε-δ por primera vez")

Ex La fonction $\varphi : Q \longmapsto \frac{\alpha(Q)}{\beta(Q)}$ de l'Obs 2, est régulière sur $D(\beta)$

Fixons $P \in D(\beta)$ on a

- $\beta \in k[V]$ et $\beta(P) \neq 0$
- $\alpha \in k[V]$

$W = D(\beta)$ - ouvert dans $D(\beta)$
- contenant P

↳ et $\forall Q \in W = D(\beta)$ on a

$$\varphi(Q) = \frac{\alpha(Q)}{\beta(Q)} \qquad \square$$

Ex Soit $V = V(XY - ZW) \subseteq \mathbb{A}^3$

$\mathfrak{a} = \langle XY - ZW \rangle$, $k[V] = \dfrac{k[X,Y,Z,W]}{\mathfrak{a}}$

$X + \mathfrak{a} = x$, $Y + \mathfrak{a} = y$ etc

Sur $D(z)$ on a

$$f = \frac{x}{z} = \frac{X+\mathfrak{a}}{Z+\mathfrak{a}} \text{ est régulière}$$

Sur $D(y)$ on a

$$g = \frac{w}{y} \text{ est régulière.}$$

Pour $P = (x,y,z,w) \in D(Z+\mathfrak{a}) \cap D(y+\mathfrak{a})$

on a $xy = zw \Rightarrow \dfrac{x}{z} = \dfrac{w}{y} \Rightarrow f(P) = g(P)$

On peut définir

$$\varphi : D(Z+\mathfrak{a}) \cup D(Y+\mathfrak{a}) \longrightarrow k$$

$$p \longmapsto \begin{cases} f(P) & \text{si } P \in D(Z+\mathfrak{a}) \\ g(P) & \text{si } P \in D(Y+\mathfrak{a}) \end{cases}$$

c'est bien définie et régulière.

<u>Rappel</u> pour $U \subseteq V$ ouvert, une fonction $\varphi : U \to k$ est régulière en P si c'est donnée par une fraction "autor de P"

- régulière sur U c'est localement donnée par ~~xxx~~ des fractions

<u>BUT</u> Démontrer que pour $U = D(\beta)$ pour $\beta \in k[V]$ une fonction régulière sur U est en fait globalement une <u>fraction</u>

<u>Étape 1</u> : Comprendre des "fractions" des éléments d'un anneau A.

<u>Def</u> : un sous-ensemble $S \subseteq A$ est multiplicatif si

$$\begin{cases} 1 \in S \\ \forall a, b \in S : ab \in S \end{cases}$$

<u>Exemple</u> (I) Si A est intègre, $S = A \setminus \{0\}$ (exercice)

(II) Si $h \in A$, $S_h = \{1, h, h^2, \dots, h^m, \dots\}$

(III) Si $\mathfrak{p} \subset A$ est premier, $S_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p}$

<u>Remarque</u> : (3) $\Rightarrow$ (1) ; A intègre $\Leftrightarrow$ $\{0\}$ premier

avertissement : Si $h \in A$ est premier, alors (h) est premier

$$S_h = \{h^m\}_{m \geq 0} \qquad S_{(h)} = \{a \in A \mid h \nmid a\}$$

<u>Def</u> La localization de A par rapport à S est

$$S^{-1}A = A[S^{-1}]$$

$$: A \times S / \sim$$

où

$$(a,s) \sim (b,t) \iff \exists u \in S \text{ t.q. } u(at - bs) = 0$$

on écrit $(a,s) = \frac{a}{s}$

Pourquoi le u? $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \iff \frac{1}{u}\frac{a}{s} = \frac{1}{u}\frac{b}{t}$

$$\Updownarrow$$

$$u(at - bs) = 0$$

<u>Remarques</u> ① : Si $0 \in S$, on prend $u = 0$:

$$u(at - bs) = 0 \quad \forall a, t, b, s$$

$$\Rightarrow (a,s) \sim (b,t) \quad \forall (a,s), (b,t)$$

$$\Rightarrow S^{-1}A \cong \{0\}$$

Hilroy

② Si A est intègre et $0 \notin S$ on peut annuler ~~le u~~ :

$$(a,s) \sim (b,t) \iff at = bs$$

③ $S^{-1}A$ est un anneau

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$$

et

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

On a un homomorphisme d'anneaux

$$A \longrightarrow S^{-1}A$$
$$a \longmapsto \frac{a}{1}$$ (on écrit souvent $a \in S^{-1}A$)

avec $\mathrm{Ker}(i) = \left\{ \frac{a}{1} \;\middle|\; \frac{a}{1} = \frac{0}{1} \right\}$

$= \{ a \in A \mid \exists u \in S \text{ t.q. } u(a \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0 \}$

$= \{ a \in A \mid \exists u \in S \text{ avec } ua = 0 \}$

$= \{ a \in A \mid \text{div de } 0 \}$

En particulier, c'est injectif

$\iff$ A est intègre

Exemple (1) A intègre, $S = A \setminus \{0\}$

$\Rightarrow S^{-1}A = F$ le corps de fractions

(2) $S_h = \{1, h, h^2, \dots\}$

$A_h := S_h^{-1}A = \left\{ \frac{a}{h^m} \;\middle|\; a \in A, \ m \geq 0 \right\}$

où $\frac{a}{h^m} = \frac{b}{h^n} \Leftrightarrow \exists N > 0$ t.q.

$h^N(ah^n - bh^m) = 0$

Rem. ① Si h est nilpotent, $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{h^m} \in S$

$\Rightarrow A_h = \{0\}$

② Si A est intègre avec corps de fractions F

$A_h \subseteq F$

Reformuler notre but :

Démontrer que l'algèbre des fonctions régulières sur $U = D(\beta) \subseteq V$ est isomorphe à $k[V]_\beta$

Prop Soit $h \in k[V] \setminus \{0\}$.

On a un homomorphisme canonique d'algèbres

$$\Theta : k[V]_h \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{fonctions régulières} \\ \text{sur } D(h) \end{array} \right\}$$

$$\frac{g}{h^m} \longmapsto \left(\begin{array}{c} P \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ D(h) \end{array} \longmapsto \frac{g(P)}{h(P)^m} \in k \right)$$

Démo. Il faut démontrer que

① c'est bien defini

② c'est un homomorphisme exercice

① On a vu vendredi que $P \longmapsto \dfrac{g(P)}{h(P)^m}$ est régulière sur $D(h)$

Supposons que $\dfrac{g}{h^m} = \dfrac{f}{h^n}$

$\Longleftrightarrow \exists N$ t.q.

$$h^{N+n} g = h^{N+m} f$$

$\Longrightarrow \forall P \in D(h) : \; h(P)^{N+n} g(P) = h(P)^{N+m} f(P) \in k$

$\Longrightarrow$ (comme k est un corps et $h(P) \neq 0$)

$$h(P)^n g(P) = h(P)^m f(P)$$

$$\Longrightarrow \frac{g(P)}{h(P)^m} = \frac{f(P)}{h(P)^n} \in k \quad \forall P \in D(h)$$

Hilroy

$\Rightarrow$ les fractions $\Theta\left(\frac{g}{h^m}\right)$ et $\Theta\left(\frac{f}{h^n}\right)$ sont pareilles $\square$

Lemme $\Theta\left(\frac{g}{h^m}\right) : D(h) \longrightarrow k$ est 0

$\iff gh = 0$ dans $k[V]$

en particulier, Θ es injectif

Demo "$\Rightarrow$" Supposons que $\frac{g(p)}{h(p)^m} = 0 \quad \forall p \in D(h)$

$\Rightarrow g(p) = 0 \quad \forall \quad p \in D(h)$

Par contre, $\forall p \notin D(h)$: $\quad p \in V(h) \Rightarrow h(p) = 0$

Dans les deux cas: $\quad g(p)h(p) = 0 \quad \forall p \in V$

$\iff \widetilde{gh} = 0$

$\iff gh = 0 \in k[V]$

"$\Leftarrow$" Si $gh = 0 \in k[V]$

$\Rightarrow g(p)h(p) = 0 \quad \forall p \in V$, en particulier

pour $p \in D(h)$, on a $\quad g(p)\underbrace{h(p)}_{\neq 0} = 0 \quad \in k$

$\Rightarrow g(p) = 0 \quad \forall p \in D(h)$

$$\Longrightarrow \frac{g(p)}{h(p)^m} = 0 \quad \forall p \in D(h)$$

$$\Longrightarrow \theta\left(\frac{g}{h^m}\right) = 0 \qquad \square$$

<u>Théorème</u> On a un isomorphisme

$$\theta : k[V]_h \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{fonctions régulières} \\ D(h) \to k \end{array} \right\}$$

<u>Démo</u> Il nous reste à demontrer que θ est surjectif.

Soit $\varphi : D(h) \longrightarrow k$ régulière

On v.m.q. $\varphi = \theta(g/h^m)$

On sait qu'il existe un recouvrement ouvert

$$D(h) = \bigcup_i U_i \text{ et des éléments}$$

$$g_i, h_i \in k[V] \text{ avec } h_i(p) \neq 0 \quad \forall p \in U_i$$

$$\text{t.q. } f|_{U_i} = g_i/h_i$$

On peut supposer que chaque U_i est principal :

$$U_i = D(\alpha_i) \text{ avec } a_i \in k[V]$$

Hilroy

Comme $D(h)$ est quasi-compact, on peut supposer que le recouvrement est fini.

$$h_i(p) \neq 0 \quad \forall p \in U_i = D(a_i)$$

$$\Rightarrow D(a_i) \subseteq D(h_i)$$

$$\underset{(\text{obs } 1)}{\Longrightarrow} \exists N > 0 \text{ et } g_i' \in k[V] \text{ t.q.}$$

$$a_i^N = h_i g_i'$$

$$\Rightarrow \frac{g_i(p)}{h_i(p)} = \frac{g_i(p) g_i'(p)}{h_i(p) g_i'(p)} = \frac{g_i(p) g_i'(p)}{a_i^N(p)} \quad \forall p \in D(h_i)$$

Comme $D(a_i) = D(a_i^N)$ on peut

remplacer a_i et h_i par a_i^N

et g_i par $g_i g_i'$

On peut donc supposer que

$$U_i = D(h_i) \text{ est } f|_{U_i} = \frac{g_i}{h_i}$$

On a $D(h) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ \text{fini}}} D(h_i)$

$$= \bigcup_{i \in I} D(h_i^2)$$

$$\Rightarrow V(h) = \bigcap V(h_i^2) = V(h_1^2, \dots, h_m^2)$$

$$\Rightarrow h \in \mathrm{rad}(h_1^2, \dots, h_m^2)$$

$$\Rightarrow \exists N \text{ t.q. } h^N \in (h_1^2, \dots, h_m^2)$$

$$\Rightarrow \exists b_i \in k[V] \text{ t.q. } h^N = \sum_{i=1}^m b_i h_i^2 \in k[V]$$

On prétend que

$$\underset{\text{égalité des fonctions}}{f =} \theta\underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \frac{b_i g_i h_i}{h^N}\right)}_{\in k[V]_h}$$

Il suffit de démontrer que les fonctions

$$h^N f \text{ et } \sum_{i=1}^m b_i g_i h_i : D(h) \longrightarrow k$$

sont égales.

Prenons $p \in D(h)$. $\exists j$ t.q. $p \in D(h_j)$

$$\text{et } f(p) = \frac{g_j(p)}{h_j(p)} \in k$$

$\Rightarrow$ on va montrer que

$$h^N(p) \frac{g_j(p)}{h_j(p)} = \sum_{i=1}^m b_i(p) g_i(p) h_i(p) \quad \forall p \in D(h_j)$$

$\Leftrightarrow$ $h^N g_j = \sum_{i=1}^m b_i g_i h_i h_j$ dans $k[V]$ (par lemme)

Sur $D(h_i) \cap D(h_j)$ on a que

$$f = \frac{g_i}{h_i} = \frac{g_j}{h_j}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i h_j - g_j h_i}{h_i h_j} \text{ est la fonction nulle}$$

$$\Rightarrow h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0 \quad \in k[V]$$

$$\Rightarrow g_i h_i h_j^2 = g_j h_i^2 h_j \quad \in k[V] \qquad (**)$$

On a donc

$$h^N g_j h_j = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{b_i h_i^2 g_j h_j}_{(**)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} b_i g_i h_i h_j^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} b_i g_i h_i h_j \right) h_j$$

$\Rightarrow$ sur $D(h_j)$

$$h^N g_j = \sum_{i=1}^{m} b_i g_i h_i h_j \qquad \text{comme voulu}$$

Sur $V(h_j)$, les deux sont nuls. $\square$

Hilroy

Ex $h = 1 \in k[V]$ $D(h) = V$

Thm $\Rightarrow$ les fonctions régulières sur V sont $k[V]_1 \cong k[V]$

On retrouve notre déf originale de fonctions régulières sur V

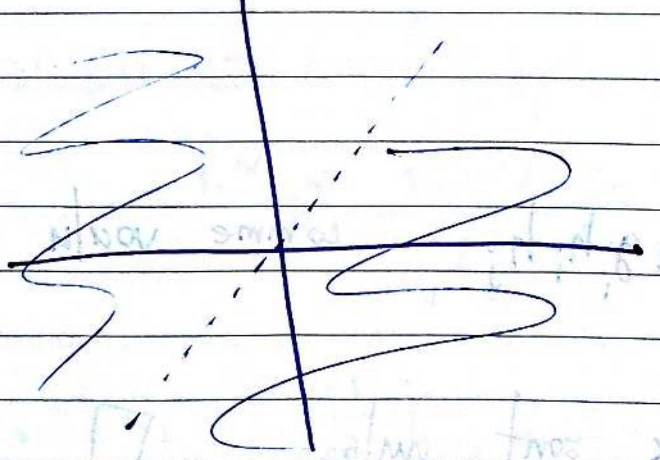
$h = X \in k[X]$. $D(X) = \{x \neq 0\} = k \setminus \{0\}$

$$k[V]_X = \left\{ \frac{f}{X^m} \,\middle|\, f \in k[V] \right\}$$

$$h = X - Y \in k[X, Y]$$

$$D(h) = \{(x,y) \in k^2 \mid x \neq y\}$$

$$k[V]_{X-Y} = \left\{ \frac{f(X,Y)}{(X-Y)^m} \right\}$$



__Rappel__ Soit $U = D(\beta) \subseteq V$

On identifie $\mathcal{O}_V(U) = \{\text{fonctions } \varphi : U \longrightarrow k \text{ réguliers}\}$

avec

$$k[V]_\beta = \left\{ \frac{\alpha}{\beta^m} \;\middle|\; \alpha \in k[V],\ m \geq 0 \right\}$$

__Revisiter__ V est irréductible

$\iff I(V)$ est premier

$\iff k[V]$ est intègre

__Idée__ "$\Leftarrow$" Si $V = V_1 \cup V_2$ est réductible

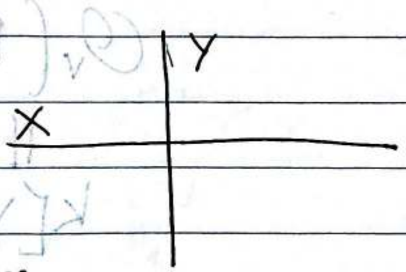
$\exists$ fonctions $f_1, f_2 : V \longrightarrow k$ reg. t.q.

$f_i\big|_{V_i} \equiv 0$ mais $f_i \neq 0$

$(\not\Leftrightarrow f_i(p) \neq 0 \ \forall p \in V_i)$

on a $f_1 f_2 = 0$

$\Longrightarrow k[V]$ n'est pas intègre



"$\Longrightarrow$" Si $k[V]$ n'est pas intègre,

$\exists f_1, f_2 \neq 0$ avec $f_1 f_2 = 0$

et $V = V(f_1) \cup V(f_2)$ $\square$

Alors : si V est irréductible, on peut former le corps de fractions de $k[V]$.

$\rightsquigarrow$ le corps de fonctions rationnels sur V, noté $k(V)$.

$\forall h \in k[V]$ on a une inclusion $k[V]_h \subset k(V)$

⚠ $f = \frac{p}{q} \in k(V)$ n'est pas une fonction sur V, seulement sur $D(q)$.

Ex $V = \mathbb{A}^1$, $k[V] = k[X]$

$$k(V) = \left\{ \frac{p(X)}{q(X)} \;\middle|\; q \neq 0 \right\} = k(X)$$

RESTRICTIONS DE FONCTIONS

Si $D(h_1) \subseteq D(h_2)$, restriction donne

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_V(D(h_2)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_V(D(h_1)) \arrow[d, equal] \\ k[V]_{h_2} \arrow[r, dashed] & k[V]_{h_1} \end{tikzcd}$$

$$\frac{g}{h_2^m} \longmapsto \frac{f^m g}{h_1^{mN}}$$

Rappel (obs 1) $D(h_1) \subseteq D(h_2)$

~~dans~~ $\iff \exists N > 0$ et $f \in k[V]$ t.q. : $h_1^N = f h_2$

dans $k(V)$

$$\frac{g}{h_2^m} = \frac{f^m g}{f^m h_2^m} = \frac{f^m g}{(h_1)^{mN}}$$

Ex : indépendent des choix de g, m, N, f.

Compatible avec la restriction :

$$\text{Si } D(h_1) \subseteq D(h_2) \subseteq D(h_3)$$

$$h_1^N = f h_2 \qquad h_2^M = g h_3$$

$$\Rightarrow h_1^{NM} = (f h_2)^M = f^M g h_3$$

$$k[V]_{h_3} \longrightarrow k[V]_{h_2} \longrightarrow k[V]_{h_1}$$

$$\frac{\alpha}{h_3^m} \longmapsto \frac{g^m \alpha}{h_2^{Mm}} \longmapsto \frac{f^{Mm} g^m \alpha}{h_1^{NMm}}$$

où

$$k[V]_{h_3} \longrightarrow k[V]_{h_1}$$

$$\frac{\alpha}{h_3^m} \longmapsto \frac{(f^M g)^m \alpha}{h_1^{NMm}}$$

LES FAISCEAUX (presheaf)

Soit X un espace topologique.

Def un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X est une règle qui donne

- pour chaque $U \subseteq X$ ouvert, un ensemble

$$\mathcal{F}(U)$$

- pour chaque pair $U \subseteq V \subseteq X$, une application "de restriction"

$$\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

t.q.

- $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$

- pour $U \subseteq V \subseteq W$, on a

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(W) \arrow[rr, "\rho_{WU}"] \arrow[dr, "\rho_{WV}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F}(U) \\
& \mathcal{F}(V) \arrow[ur, "\rho_{VU}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\Longleftrightarrow \rho_{VU} \circ \rho_{WV} = \rho_{WU}$$

Ex Soit $\mathcal{O}(X)$ la catégorie avec

objects : $\{ U \subseteq X \mid$ ouverts $\}$

morphismes : inclusions

Alors un préfaisceau est exactement un functeur

$$\mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow Set$$

• on peut remplacer "ensemble" et "application"

par autres structures, comme groupe ~~et~~ homomorphisme

algèbre et "

etc etc

Exemple Soit $X = V$ un ensemble algèbrique.

On a un préfaisceau $\mathcal{O}_V$ définit par

• $\mathcal{O}_V(U) = \{$ fonct. règulières $\phi : U \to k \}$

pour $U \subseteq W$.

$$\rho_{W,U} : \mathcal{O}_V(W) \longrightarrow \mathcal{O}_V(U)$$

$$\phi \longmapsto \phi|_U \quad \text{(restriction)}$$

homomorphisme de k-algèbres

En fait $\mathcal{O}_V$ est un préfaisceau de k-algèbres.

• On a aussi des préfaisceaux de fonctions continues, differentiables, etc. (Sur X où ces notions sont définies)

Notations on écrit souvent

$$\rho_{WU}(\phi) = \phi\big|_{U}$$

Exemple Fixons E un ensemble

Le préfaisceau constant associé à E :

$$\mathcal{F}_E : U \subseteq X \longmapsto \mathcal{F}_E(U) := E$$

$$U \subseteq W \longmapsto \underset{\substack{\parallel \\ Id_E}}{\rho_{WU}} : E \longrightarrow E$$

$$\rho_{UV} = Id_E \quad \checkmark$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "Id_E"] \arrow[dr, "Id_E"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & E \\ & E \arrow[ur, "Id_E"'] & \end{tikzcd}$$

Déf Un préfaisceau $\mathcal{F}$ (d'ensembles, algèbres, etc) est un faisceau si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

$$\text{Soit } U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

① Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ et $f\big|_{U_i} = g\big|_{U_i}$ $\forall i \in I$, alors

en fait $f = g$.

② Si on a $\{f_i \in \mathcal{F}(U_i)\}_{i \in I}$ t.q.

$$\forall i, j : f_i\big|_{U_i \cap U_j} = f_j\big|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

alors $\exists f \in \mathcal{F}(U)$ t.q. $f|_{U_i} = f_i \quad \forall i \in I$

Ex Soit $\mathcal{F}$ le préfaisceau des fonctions continues sur X et

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$$

① On commence avec $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continues t.q. $\forall i : f|_{U_i} = g|_{U_i}$

$$\forall p \in U, \exists i \text{ t.q. } p \in U_i$$

et donc $f(p) = f|_{U_i}(p)$

$$= g|_{U_i}(p) = g(p)$$

et donc les fonctions f, g sont égales

② On commence avec des fonctions continues $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\forall p \in U_i \cap U_j$ on a

$$f_i(p) = f_j(p) \quad (*)$$

on essaie de définir $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(p) = f_i(p) \quad \text{si } p \in U_i$$

par $(*)$ c'est bien définie.

$\forall p \in U_i$, $f|_{U_i} = f_i$ est continue à p

$\Longrightarrow$ f est continue $\forall p \in \mathcal{U}$.

Exemple Soit $\mathcal{P}$ une propriété des fonctions qui peut être vérifiée localement

- continue
- différentiable (pour X une variété diff)

* régulière (pour $X=V$ algébrique)

$\mathcal{O}_V$ est une faisceau!

- analytique (pour $X \subseteq \mathbb{C}^n$)

Alors on obtient un faisceau de fonctions satisfaisant la propriété $\mathcal{P}$.

! non-exemple · fonctions bornées (Si X n'est pas quasi-compact)

· fonctions constantes (si X est réductible)

↳ Si $U_1, U_2 \subseteq X$ avec $U_1 \cap U_2 = \phi$, alors on peut définir

$$f_1 : U_1 \longrightarrow k$$
$$x \longmapsto 1$$

$$f_2 : U_2 \longrightarrow k$$
$$x \longmapsto 2$$

et $f_1\big|_{U_1\cap U_2} = f_2\big|_{U_1\cap U_2}$

(trivialement)

Mais $\nexists$ fonction constante $f : U_1 \cap U_2 \longrightarrow k$

avec $f\big|_{U_i} = f_i$

Par la même raison, $\mathcal{F}_E$ n'est pas un faisceau

($\mathcal{F}_E$ est le préfaisceau de fonctions constantes avec valeurs dans E.)

<u>Déf</u> Soit $\mathcal{F}$ un (pré) faisceau sur X.

- Les éléments $s \in \mathcal{F}(U)$ sont appellés les sections de $\mathcal{F}$ sur U ou des sections locales

- Les sections de $\mathcal{F}(X)$ sont les sections globales de $\mathcal{F}$.

On utilise parfois la notation

$$\mathcal{F}(U) := \Gamma(U, \mathcal{F})$$

$$\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})$$

Exercice Si $\mathcal{F}$ est un (pré)faisceau sur X et $Y \subseteq X$ est ouvert, on obtient un (pré)faisceau $\mathcal{F}|_Y$ sur Y

$$U \subseteq Y \subseteq X \rightsquigarrow \mathcal{F}|_Y(U) = \mathcal{F}(U)$$

Hilroy

Exercice Si $\mathcal{F}$ est un (pré)faisceau sur X et $Y \subseteq X$ est ouvert, on obtient un (pré)faisceau $\mathcal{F}|_Y$ sur Y

$$U \subseteq Y \subseteq X \rightsquigarrow \mathcal{F}|_Y(U) = \mathcal{F}(U)$$

2025-10-28 [Mardi]

Rappel Un préfaisceau (de groupes) $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X

$\forall U \subseteq X$ ouvert $\rightsquigarrow \mathcal{F}(U)$ groupe

$\forall U \subseteq V \subseteq X$ ouverts $\rightsquigarrow \rho_{VU} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$, $s \longmapsto s|_U$ (homomorphisme)

\+ compatibilité

c'est un faisceau si $\forall U = \bigcup_{i \in I} U_i$ on a les 2 conditions:

1) $\forall f, g \in \mathcal{F}(U)$ avec $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ $\forall i$, on a $f = g$

2) $\forall$ famille $\{f_i \in \mathcal{F}(U_i)\}$ avec

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$

$$\exists f \in \mathcal{F}(U) \text{ t.q. } f|_{U_i} = f_i$$

//

Hilroy

Ex. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X et $Y \subseteq X$ est ouvert on obtient un préfaisceau $\mathcal{F}|_Y$ sur Y

· Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, $\mathcal{F}|_Y$ l'est aussi.

<u>Lemme</u> Soit X un espace topologique et $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}(X)$ une base pour la topologie.
Alors un faisceau $\mathcal{F}$ sur X est determiné par ses valeurs sur $\mathcal{O}'$.

<u>Démo.</u> On suppose qu'on connait les valeurs $\mathcal{F}(U)$ et f_{VU} pour $V, U \in \mathcal{O}'$.

On veut trouver les valeurs pour $V, U \in \mathcal{O}(X)$.
On peut écrire
$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{avec} \quad U_i \in \mathcal{O}'.$$

Pour spécifier $f \in \mathcal{F}(U)$, it suffit de spécifier
$$\{ f_i \in \mathcal{F}(U_i) \}_{i \in I} \quad \text{avec } U_i \in \mathcal{O}' \checkmark$$
avec
$$f_i|_{\underline{U_i \cap U_j}} = f_j|_{\underline{U_i \cap U_j}}$$
peut être $U_i \cap U_j \notin \mathcal{O}'$

Écrivons $U_i \cap U_j = \bigcup_{k \in K} W_k^{ij}$ avec $W_k^{ij} \in \mathcal{O}'$. données dans $\mathcal{O}'$
$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \iff \overbrace{f_i|_{W_k^{ij}} = f_j|_{W_k^{ij}}} \quad \forall k \in K$$

Alors on peut poser

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ \left(f_i \in \mathcal{F}(U_i) \right)_{i \in I} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i,j,k \text{ on a} \\ f_i|_{W_k^{ij}} = f_j|_{W_k^{ij}} \end{array} \right\}$$

à verifier:

- cela ne dépend pas sur les choix de

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{et} \quad U_i \cap U_j = \bigcup_{k \in K} W_k^{ij}$$

- décrire les restrictions "□"

Exemple Pour V algébrique, le faisceau $\mathcal{O}_V$ de fonctions réguliers est déterminé par

- $\mathcal{O}_V(D(h)) = k[V]_h$
- $D(h_1) \subseteq D(h_2) \quad (\Leftrightarrow h_1^N = g h_2)$

$$\rho : k[V]_{h_2} \longrightarrow k[V]_{h_1}$$

$$\frac{1}{h_2} \longmapsto \frac{g}{h_1^N}$$

* c'est un peu plus simple que le lemme car

$D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ est encore

dans le base (alors on n'a pas besoin des W_k^{ij})

Déf Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux préfaisceaux sur X.

Un morphisme de préfaisceaux : $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$

est une collection de morphismes

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \quad \forall U \subseteq X \text{ ouvert.}$$

compatible avec la restriction :

$\forall U \subseteq V \subseteq X$ ouverts :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{VU}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{VU}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"'] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

Remarque : considerant $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ comme foncteurs

$$\mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow \mathcal{C},$$

φ est une transformation naturelle.

Déf. Un morphisme de faisceaux est un morphisme de préfaisceaux

Ex. par $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ des faisceaux et $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}(X)$ une base de la topologie, les valeurs de φ son déterminées par φ_U, $U \in \mathcal{O}'$.

Déf un k-espace annelé est un paire $(X, \mathcal{O}_X)$ où

X : espace topologique

$\mathcal{O}_X$: faisceaux de k-algèbres sur X

Exemples

① V un ensemble algebrique
$\mathcal{O}_V$ les fonctions régulières

② X espace topologique
$\mathcal{O}_X^{cts}$ les fonctions continues $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

(donc $(X, \mathcal{O}_X^{cts})$ est un $\mathbb{R}$-espace annelé)

$(X, \mathcal{O}_X)$ espace annelé, $Y \subseteq X$ ouvert

$\Longrightarrow (Y, \mathcal{O}_X|_Y)$ est un espace annelé.

Morphismes? Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés sur k.

Un morphisme $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ devrait être

- une application continue $\varphi : X \longrightarrow Y$

\+ compatible avec les faisceaux ??

? morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X, \dots, \mathcal{O}_Y$?

problème : ils sont des faisceaux sur des espaces différents ! $\boxed{\ /\ /\ }$

Solution : On peut utiliser $\varphi : X \longrightarrow Y$ pour transformer $\mathcal{O}_X$ en un faisceau sur Y.

Définition. Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ continue et $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X.

On définit $\varphi_* \mathcal{F}$ un préfaisceau sur Y :

- pour $\underset{\text{ouvert}}{U \subseteq Y}$: $(\varphi_* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\underbrace{\varphi^{-1}(U)}_{\text{ouvert dans } X})$

- pour $U \subseteq V \subseteq Y$ ouverts

$$\begin{tikzcd}
(\varphi_* \mathcal{F})(V) \arrow[r, dashed, "\rho_{VU}^{\varphi_* \mathcal{F}}"] \arrow[d, equal] & (\varphi_* \mathcal{F})(U) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V)) \arrow[r, "\rho^{\mathcal{F}}_{\varphi^{-1} V, \varphi^{-1} U}"'] & \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))
\end{tikzcd}$$

$$\varphi^{-1}(U) \subseteq \varphi^{-1}(V) \subseteq X$$

Exercice : • $\varphi_* \mathcal{F}$ est un préfaisceau

• Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, $\varphi_* \mathcal{F}$ l'est aussi.

Déf. Un morphisme $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$

d'espaces annelés est un paire :

- $\varphi : X \longrightarrow Y$ continue
- $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$ un morphisme de faisceaux d'algèbres sur Y.

Donc $\forall U \subseteq Y$ ouvert on a

$$\tilde{\varphi}_U : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$$

compatibles avec la restriction.

Exemple Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ continue. On obtient automatiquement :

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_Y^{cts} \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X^{cts} \quad \text{t.q.}$$

pour $U \subseteq Y$ ouvert

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi} : \mathcal{O}_Y^{cts}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{cts}(\varphi^{-1}(U)) \\ \Psi & & \Psi \\ (f : U \to \mathbb{R}) & \longmapsto & (\varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}) \end{array}$$

i.e. $\tilde{\varphi}_U(f) = f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}$ compatible avec la restriction.

Un autre exemple

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espace annelé et $Y \subseteq X$ ~~est ouvert~~

on obtient $(Y, \mathcal{O}_X|_Y)$ un espace annelé.

L'inclusion $i : Y \longrightarrow X$ est naturellement un morphisme d'espaces annelés:

$$\tilde{i} : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_X|_Y) \qquad \underset{\parallel}{} \mathcal{O}_X(U \cap Y)$$

$$\forall \underset{\text{ouvert}}{U \subseteq X} : \quad \tilde{i}_U : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow[\text{restriction}]{} \mathcal{O}_X|_Y(i^{-1}(U))$$

restriction :).

BUT Comprendre les morphismes entre ensembles algébriques

Idée : un morphisme $V \xrightarrow{\varphi} W$ devrait

1) être continue pour la topologie de Zariski

2) être tel que si $U \subseteq W$ est ouvert et $f : U \longrightarrow k$ est régulière, alors $(f \in \mathcal{O}_W(U))$

$$f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow k \qquad (*)$$

est aussi régulière

$$\left(f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_V(\varphi^{-1}(U)) \right)$$

$-\!\!\!/\!\!/-$

Soit $\varphi : \underset{\underset{\mathbb{A}^n}{\cap}}{V} \longrightarrow \underset{\underset{\mathbb{A}^m}{\cap}}{W}$, $\forall p \in V$, $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p))$

On obtient $\varphi_i := x_i \circ \varphi : V \longrightarrow k$ pour

$x_i : W \longrightarrow k$ la i-ème fonction coordonée

$(w_1, \dots, w_m) \longrightarrow w_i$

· La condition $(*)$ avec $f = x_i$ et $U = W$ implique que

φ_i devrait être régulière

$-\!\!\!/\!\!/-$

<u>Déf.</u> Une application $\varphi : V \longrightarrow W$ est régulière si chacune de ses composantes $\varphi_i = x_i \circ \varphi$ est une fonction régulière sur V

$\iff$ φ_i s'écrit comme polynôme.

<u>Lemme.</u> (a) Une application $\varphi : V \longrightarrow W$ est régulière $\iff$ $f \circ \varphi$ est régulière $\forall f \in k[W]$

(b) Une application régulière est continue par la topologie de Zariski

Démo "$\Leftarrow$" On prend $f = x_i$ et on trouve que φ est régulier.

"$\Rightarrow$" Soit $f \in k[W]$. Comme $k[W]$ est engendrée par $\{x_i\}$, on peut écrire $f = \sum_{d_1,\dots,d_m \in \mathbb{Z}} a_{d_1 \cdots d_m} x_1^{d_1} \cdots x_m^{d_m}$

$$\Rightarrow f \circ \varphi = \sum_{d_1,\dots,d_m \in \mathbb{Z}} a_{d_1 \cdots d_m} (x_1 \circ \varphi)^{d_1} \cdots (x_m \circ \varphi)^{d_m}$$

$$\in k[V]$$

$f \circ \varphi$ est régulière :)

(b) Soit $\varphi : V \to W$ régulière.
Soit $Z \subseteq W$ fermé.
V.m.q

$$\varphi^{-1}(Z) \subseteq V \text{ est fermé}$$

$$\Downarrow$$

$$Z = V(\mathfrak{a}) \text{ avec } \mathfrak{a} \subseteq k[W]$$

Si $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_N) \subseteq k[W]$, alors $Z = \{ P \in W \mid f_i(P) = 0,\ i = 1, \dots, N \}$

et $\varphi^{-1}(Z) = \{ Q \in V \mid \overbrace{f_i \circ \varphi(Q)}^{\text{régulière par (a)}} = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, N \}$

On prend $\mathfrak{b} = (f_i \circ \varphi)_{i=1}^{N} \subseteq k[V]$ et on a que

$$\varphi^{-1}(Z) = V(\mathfrak{b}) \text{ est fermé.}$$

2025-10-31 [Vendredi]

<u>Rappels</u> · Un morphisme d'espaces annelés :

$$(\varphi, \tilde{\varphi}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

$$\varphi : X \longrightarrow Y \text{ cont.}$$

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$$

· Une application $\varphi : \underset{\mathbb{A}^n}{\overset{\cap\!\!|}{V}} \longrightarrow \underset{\mathbb{A}^m}{\overset{\cap\!\!|}{W}}$ entre ensembles algebriques est régulière si

$$\varphi_i = x_i \circ \varphi \text{ est régulière } \forall i$$

$$* \ \varphi \text{ est continue.}$$

is this redundant? We defined regular ~~map~~ map with just the condition above.

· On obtient une application

$$\varphi^* : k[W] \longrightarrow k[V]$$
$$f \longmapsto f \circ \varphi = \varphi^* f$$

Ex : φ^* est un homomorphisme de k-algèbres.

On aimerait definir $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_W \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_V$ t.q $(\varphi, \tilde{\varphi})$ soit ~~une~~ morphisme d'espaces annelés.

Il suffit de définir $\tilde{\varphi}_U$ pour $U = D(h) \subseteq W$ des ensembles ouverts de base $(h \in k[W])$

On veut $\tilde{\varphi}_{D(h)} : \mathcal{O}_W(D(h)) \dashrightarrow \mathcal{O}_V(\varphi^{-1}(D(h)))$

- $\mathcal{O}_W(D(h)) \cong k[W]_h \ni \dfrac{f}{h^n}$

- $\varphi^{-1}(D(h)) = \{ P \in V \mid \varphi(P) \in D(h) \}$

$$= \{ P \in V \mid \underbrace{h(\varphi(P))}_{(\varphi^* h)(P)} \neq 0 \}$$

$$= D(\varphi^* h)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{O}_V(\varphi^{-1}(D(h))) \cong k[V]_{\varphi^* h}$$

Alors on veut

$$\tilde{\varphi}_{D(h)} : k[W]_h \longrightarrow k[V]_{\varphi^* h}$$

$$\frac{f}{h^N} \longmapsto \frac{\varphi^* f}{(\varphi^* h)^N}$$

Ex : montrer que c'est bien définie & un homomorphisme.

Compatible avec la restriction : pour $D(h_1) \subseteq D(h_2) \subseteq W$

$$\frac{f}{h_2^N} \longmapsto \frac{g^N f}{h_1^{NM}}$$

$$\begin{tikzcd}
k[W]_{h_2} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{O}_W(D(h_2)) \arrow[r, "\text{rest}"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}_{D(h_2)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright ?"] & \mathcal{O}_W(D(h_1)) \arrow[d, "\tilde{\varphi}_{D(h_1)}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & k[W]_{h_1} \\
k[V]_{\varphi^* h_2} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{O}_V(D(\varphi^* h_2)) \arrow[r, "\text{rest}"'] & \mathcal{O}_V(D(\varphi^* h_1)) \arrow[r, phantom, "\cong"] & k[V]_{\varphi^* h}
\end{tikzcd}$$

$$\frac{g^N f}{h_1^{NM}} \longmapsto \frac{\varphi^*(g^N f)}{\varphi^*(h_1)^{NM}} =$$

$$\frac{f}{h_2^N} \longmapsto \frac{\varphi^* f}{(\varphi^* h_2)^N}$$

$$\frac{\varphi^* f}{(\varphi^* h_2)^N} \longmapsto \frac{(\varphi^* g)^N \varphi^* f}{(\varphi^* h_1)^{NM}}$$

où pour $D(h_1) \subseteq D(h_2) \subseteq W$:

$$\Leftrightarrow \exists M \text{ t.q. } h_1^M = g h_2$$

$$\Rightarrow (\varphi^* h_1)^M = (\varphi^* g)(\varphi^* h_2)$$

$\varphi: V \to W$

conclusion du diagramme: une application régulière donne un morphisme d'espaces annelés

$$(\varphi, \tilde{\varphi}) : (V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_W)$$

//

Lemme. Soit $\varphi: V \to W$ régulière avec $\varphi^*: k[W] \to k[V]$.

Si $Q \in V$ correspond à l'ideal maximal $m_Q \subseteq k[V]$,

alors $m_{\varphi(Q)} = (\varphi^*)^{-1}(m_Q)$.

Remarque: Cela implique que les valeurs de φ sont déterminés par φ^*.

Demo: $m_Q = I(Q) = \{ f \in k[V] \mid f(Q) = 0 \}$

$$(\varphi^*)^{-1}(m_Q) = \{ g \in k[W] \mid (\varphi^* g)(Q) = 0 \}$$
$$= \{ g \in k[W] \mid g(\varphi(Q)) = 0 \}$$
$$= m_{\varphi(Q)} \qquad \square$$

PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS RÉGULIÈRES

<u>Déf.</u> Une application régulière $\varphi : V \to W$ est

(1) <u>dominante</u> si $\varphi(V)$ est dense dans W
("presque surjective")

(2) <u>quasi-fini</u> si $\forall P \in W$,

$$\varphi^{-1}(P) \text{ est un ensemble fini}$$

("presque injective")

(3) finie si $k[V]$ est une $k[W]$-algèbre fini
sous l'application

$$\varphi^* : k[W] \longrightarrow k[V].$$

<u>Rappel</u> : Une A-algèbre B est finie $\Leftrightarrow$ elle est finiment engendrée et entière sur A.

- $k[V]$ est finiment engendrée comme k-algèbre et donc certainement comme $k[W]$-algèbre.

$\therefore$ $k[V]$ est fini sur $k[W]$ $\Leftrightarrow$ c'est entier sur $k[W]$.

- On va eventuellement être capable de démontrer que φ est finie

$$\Rightarrow \varphi \text{ quasi-finie.}$$

Proposition. Une application régulière $\varphi : V \longrightarrow W$ est dominante $\iff \varphi^* : k[W] \longrightarrow k[V]$ est injectif.

Démo "$\Longrightarrow$" Supposons que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est dense dans W.

Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi^*) \subseteq k[W]$

$$0 = \varphi^* f = f \circ \varphi \iff \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V(f) \qquad (*)$$

Mais $V(f)$ est fermé, donc $\underbrace{\overline{\mathrm{Im}(\varphi)}}_{= W} \subseteq V(f)$

Ainsi $V(f) = W$ et donc $f = 0$.

"$\Longleftarrow$" Supposons que $\mathrm{Im}(\varphi)$ n'est pas dense. Donc

$$\overline{\mathrm{Im}(\varphi)} = V(\mathfrak{a}) \subsetneq W$$

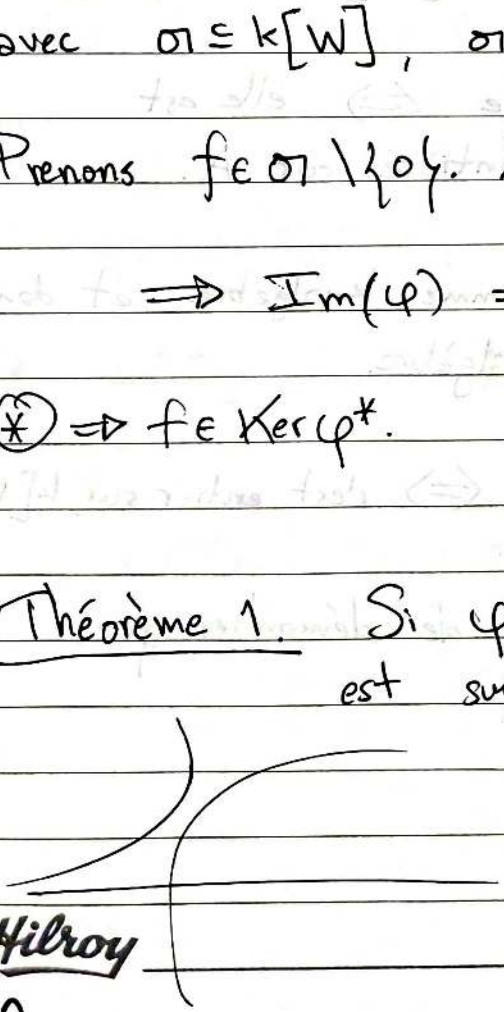
avec $\mathfrak{a} \subseteq k[W]$, $\mathfrak{a} \neq (0)$.

Prenons $f \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$. Alors $(f) \subseteq \mathfrak{a}$.

$$\Longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$$

$(*) \Longrightarrow f \in \mathrm{Ker}\,\varphi^*$. $\square$

Théorème 1. Si φ est dominante et finie, alors φ est surjective.



- La preuve utilise des résultats de l'algèbre.

Théorème 2 [théorème de montée][going-up theorem]

Soient $A \subseteq B$ deux anneaux avec B entier sur A.

(a) par chaque idéal premier $\mathfrak{p} \subseteq A$,

$\exists$ idéal premier $\mathfrak{q} \subseteq B$ t.q. $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.

(b) Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$, alors $\mathfrak{q}$ est maximal $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}$ l'est
[devoir 3, déjà fait]

Théorème 2 $\Rightarrow$ Théorème 1.

- φ dominante $\Rightarrow$ φ^* est injectif

$$\underset{A}{\overset{\shortparallel}{k[W]}} \hookrightarrow \underset{B}{\overset{\shortparallel}{k[V]}}$$

- φ finie $\Rightarrow$ $k[V]$ est entière sur $k[W]$

Soit $P \in W$. On cherche $Q \in V$ avec $\varphi(Q) = P$.

Considerons $\mathfrak{m}_P \subseteq k[W]$.

Thm 2 : (a) $\Rightarrow$ $\exists\, \mathfrak{q} \subseteq k[V]$ avec $\mathfrak{q} \cap k[W] = \mathfrak{m}_P$

(b) $\Rightarrow$ $\mathfrak{q}$ est maximal $\Rightarrow$ $\exists\, Q \in V$ t.q. $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_Q$

$\therefore\ \mathfrak{m}_P = \mathfrak{q} \cap k[W] = (\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{q}) = (\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_Q)$

$= \mathfrak{m}_{\varphi(Q)}$

$\Rightarrow P = \varphi(Q) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ ☺ $\square$

2025-11-04 [Mardi]

Rappel On veut demontrer le "théorème de montée"

Soient $A \subseteq B$ deux anneaux avec B entier sur A.

Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p} \subseteq A$, $\exists$ idéal premier $\mathfrak{q} \subseteq B$ t.q. $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.

Lemme 1 (devoir 3) Soient $A \subseteq B$ intègres avec B entier sur A. Alors A est un corps $\Leftrightarrow$ B l'est.

Lemme 2 Soit $S \subseteq A$ multiplicatif. Soit $i : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$.
On obtient une bijection

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{q} \subseteq S^{-1}A \\ \text{idéal premier} \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{p} \subseteq A \text{ idéal premier} \\ \text{t.q. } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{q} \longmapsto i^{-1}(\mathfrak{q})$$

$$S^{-1}\mathfrak{p} \longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{p}$$

où $S^{-1}\mathfrak{p} = (S^{-1}A)\mathfrak{p}$

Démonstration.

Remarque $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p} \Leftrightarrow \exists p \in \mathfrak{p}$ et $\frac{b}{t} \in S^{-1}A$ t.q.

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t}p = \frac{bp}{t}$$

$\Rightarrow \exists u \in S$ t.q. $uat = ubps \in \mathfrak{p}$

comme $\mathfrak{p}$ est premier et $u, t \in S$ avec $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, il faut que $a \in \mathfrak{p}$.

$$\therefore \frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p}.$$

À demontrer

(1) $i^{-1}(\mathfrak{q})$ est un ideal premier de A. avec $i^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S = \emptyset$.

si $s \in i^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S \Rightarrow s \in S$ et donc $\frac{1}{s} \in S^{-1}A$

et $\underbrace{\frac{1}{s} \cdot s}_{1} \in \mathfrak{q} \Rightarrow q = S^{-1}A$ n'est pas premier.

(2) $S^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal premier.

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in S^{-1}\mathfrak{p} \iff ab \in \mathfrak{p}$$

$$\iff a \in \mathfrak{p} \text{ ou } b \in \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{s} \text{ ou } \frac{b}{t} \in S^{-1}\mathfrak{p}.$$

(3) $i^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

$$i^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) = \left\{ a \in A \;\middle|\; \frac{a}{1} \in S^{-1}\mathfrak{p} \right\}$$

$$= \{ a \in A \mid a \in \mathfrak{p} \} = \mathfrak{p}$$

(4) $S^{-1}i^{-1}(\mathfrak{q}) = q$

$$S^{-1}i^{-1}(\mathfrak{q}) = \left\{ \frac{a}{s} \;\middle|\; a \in i^{-1}(\mathfrak{q}),\ s \in S \right\}$$

$$= \left\{ \frac{a}{s} \;\middle|\; \frac{a}{1} \in \mathfrak{q} \text{ et } s \in S \right\}$$

comme $\frac{1}{s}$ est inversible dans $S^{-1}A$,

$$\frac{a}{1} \in \mathfrak{q} \iff \frac{a}{s} \in \mathfrak{q}$$

$$\therefore S^{-1} i^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$$ ☺ □

\#

Définition. Un anneau est <u>local</u> s'il possède exactement un idéal maximal.

☺ La localization nous donne des anneaux locaux.

Prop. Soit $\mathfrak{p} \subseteq A$ premier. $S_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p}$. Alors

$$A_{\mathfrak{p}} = (S_{\mathfrak{p}})^{-1} A$$

est local, avec idéal maximal

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{c} \,\middle|\, a \in \mathfrak{p}.\ c \notin \mathfrak{p} \right\}$$
$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = (S_{\mathfrak{p}}^{-1} \mathfrak{p})$$

Démo. Par le lemme 2, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ est premier. On prétend que si $I \subsetneq A_{\mathfrak{p}}$ est un idéal alors $I \subseteq \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$.

Supposons vers une contradiction que $\exists I \subsetneq A_{\mathfrak{p}}$ avec $I \not\subseteq \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$.

Alors $\exists \frac{a}{s} \in I \setminus \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$. Donc $s \notin \mathfrak{p}$ et $a \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \frac{s}{a} \in S_{\mathfrak{p}}^{-1} A$

et donc $\frac{s}{a} \cdot \frac{a}{s} = 1 \in I$. Alors $I = A_{\mathfrak{p}}$ \# □

Hilroy

Démo du thm de montée.

Stratégie. Soit $S = A \setminus \mathfrak{p}$ multiplicatif, dans A et dans B.

Utiliser lemme 2 pour remplacer A et B avec $S^{-1}A$ (local) et $S^{-1}B$.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{idéaux premiers}\\ \mathfrak{a} \subseteq A \text{ avec}\\ \mathfrak{a} \cap S = \emptyset\end{array}\right\} \xleftrightarrow{\ \mathfrak{a} \longmapsto S^{-1}\mathfrak{a}\ } \left\{\begin{array}{c}\text{idéaux premiers}\\ \text{de } S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}\end{array}\right\}$$

$\mathfrak{b} \cap A$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathfrak{C} \cap S^{-1}A$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{p} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \\
\mathfrak{q} \arrow[u, dashed] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{cherche}"] & \mathfrak{C} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{b}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathfrak{C}$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{idéaux premiers}\\ \mathfrak{b} \subseteq B \text{ avec}\\ \mathfrak{b} \cap S = \emptyset\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{idéaux premiers}\\ \text{de } S^{-1}B\end{array}\right\}$$

On cherche $\mathfrak{q}$ avec $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

Si on trouve $\mathfrak{C} \subseteq S^{-1}B$ premier avec $\mathfrak{C} \cap S^{-1}A = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$, on aura

$$i_A^{-1}(\mathfrak{C} \cap S^{-1}A) = i_A^{-1}\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$$

mais aussi
$$i_A^{-1}(\mathfrak{C} \cap S^{-1}A) = \left\{ a \in A \;\middle|\; \tfrac{a}{1} \in \mathfrak{C} \cap S^{-1}A \right\}$$
$$= \underbrace{(i_B^{-1}\mathfrak{C})}_{\text{le } \mathfrak{q} \text{ cherché!}} \cap A.$$

Prenons $\mathfrak{C} \subseteq S^{-1}B$ un idéal maximal. On pretend que

$$\mathfrak{C} \cap S^{-1}A = \mathfrak{m}_p .$$

~~Pour~~ Par l'unicité de $\mathfrak{m}_p$ il suffit de montrer que

$$\frac{S^{-1}A}{\mathfrak{C} \cap S^{-1}A} \text{ est un corps.}$$

On a $\dfrac{S^{-1}A}{\mathfrak{C}\cap S^{-1}A} \subseteq \dfrac{S^{-1}B}{\mathfrak{C}}$

devoir 6

$\updownarrow$

entier sur

$\Rightarrow \dfrac{S^{-1}A}{\mathfrak{C}\cap S^{-1}A}$ doit être un corps aussi. $\square$

Retour aux faisceaux.

Def. Soit $\mathcal{F}$ un (pré) faisceau sur X et soit $P \in X$.
Un germe de $\mathcal{F}$ en P est une classe d'équivalence $[\mathcal{U}, s]$ où

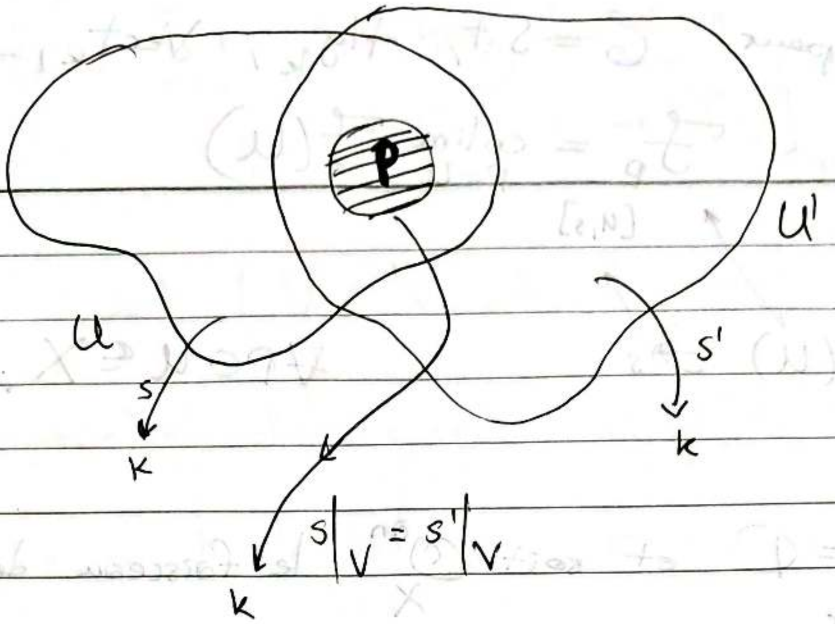
- $P \in \mathcal{U} \subseteq X$ est un voisinage ouvert
- $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ une section local (élément)

et

$[\mathcal{U}, s] = [\mathcal{U}', s'] \iff$ une voisinage $P \in V \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$

t.q.

$$s\big|_V = s'\big|_V .$$



[stalk]

L'ensemble des germes à P est la fibre de $\mathcal{F}$ en P.

$$\mathcal{F}_P := \{ [U, s] \mid \text{germe à } P \}$$

En anglais the fibre of $\mathcal{F}$ at P
= la tige de $\mathcal{F}$ en P
≠ la fibre de $\mathcal{F}$ en P.

Fait. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau d'algèbres (de groupes, anneaux, ...) alors $\mathcal{F}_P$ est une algèbre (groupe, anneau) avec

$$[U_1, s_1] + [U_2, s_2] =$$
$$= \left[U_1 \cap U_2 \,,\; s_1\big|_{U_1 \cap U_2} + s_2\big|_{U_1 \cap U_2} \right]$$

(détails : exercice)

Catégories pour $\mathcal{C} = \mathrm{Set}, \mathrm{Alg}_k, \mathrm{Vect}_k, \ldots$

$$\mathcal{F}_p = \underset{p \in U}{\mathrm{colim}}\, \mathcal{F}(U)$$

$$[U, s]$$

$$\mathcal{F}(U) \ni s \qquad \forall p \in U \subseteq X.$$

Ex Soit $X = \mathbb{C}$ et soit $\mathcal{O}_X^{an}$ le faisceau de fonctions analytiques.

Pour $p \in \mathbb{C}$ une fonction analytique f s'écrit proche de p comme

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-p)^i$$

[Principe de l'identité] Deux fonctions f_1 & f_2 ont le même série de Taylor autour de p
$\Longleftrightarrow$ elles sont égales sur leur domaine de définition commun.

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{X,p}^{an} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-p)^i \;\middle|\; \text{rayon de convergence} > 0 \right\}$$

//

Question Pour V algebrique

$\mathcal{O}_V$ fonctions régulières,

$\mathcal{O}_{V,p} = ?$

Hilroy

Théorème. $\exists$ iso. canonique d'algèbres

$$\phi : \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow k[V]_{m_p}$$

Démo. Soit $\left(\underset{p}{\underset{\cup}{\mathcal{U}}} \subseteq V, \ f : \mathcal{U} \xrightarrow[\text{régulière}]{} k \right)$

un représentant d'un germe $[\mathcal{U}, f]$.

Choisissons $h \in k[V]$ avec $p \in D(h) \subseteq \mathcal{U}$.

- $p \in D(h) \iff h(p) \neq 0$

$$\iff h \notin m_p$$

- $f|_{D(h)} \in \mathcal{O}_V(D(h)) = k[V]_h$

$\Rightarrow f|_{D(h)} = \dfrac{g}{h^m}$ avec $g \in k[V]$, $m \geq 0$.

On aimerait definir $\phi([\mathcal{U}, f]) = \dfrac{g}{h^m}$.

1) Il faut démontrer que cet élément ne dépend que sur $[\mathcal{U}, f]$.

Si on avait choisit le même $(\mathcal{U}, f)$ mais un autre h' avec $p \in D(h') \subseteq \mathcal{U}$ et

$$f|_{D(h')} = \frac{g'}{h'^M}$$

Sur $D(h) \cap D(h') = D(hh')$,

$$f|_{D(hh')} = \frac{g}{h^m} = \frac{g'}{h'^M} \in k[V]_{hh'}$$

$$\Longrightarrow \frac{g}{h^m} = \frac{g'}{h'^M} \in k[V]_{m_p}$$

Si on a $[U,f]=[U',f']$, on choisit

$$p \in D(h) \subseteq U \cap U'$$

et

$$f\Big|_{D(h)} = f'\Big|_{D(h)} = g\Big|_{h^m}$$

donc

$$(U,f) \longmapsto \cancel{g/h^m}\ g/h^m$$

$$(U',f') \longmapsto g/h^m$$

<u>Rappel</u> Pour $p \in X$, $\mathcal{F}$ un faisceau sur X

$$\mathcal{F}_p := \{ [U, f] \mid p \in \underset{\text{ouvert}}{U \subseteq X},\ f \in \mathcal{F}(U) \}$$

avec

$$[U, f] = [U', f']$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in V \subseteq U \cap U' \text{ t.q. } f|_V = f'|_V$$

<u>Remarque</u> Pour $p \in U \subseteq X$,

$$\mathcal{F}_p \cong (\mathcal{F}|_U)_p$$

<u>Thm</u> pour V algebrique

$$p \in V \longleftrightarrow m_p \subset k[V]$$

on a un isomorphisme canonique de k-algèbres

$$\Phi : \mathcal{O}_{V,p} \longrightarrow k[V]_{m_p}$$

<u>preuve</u>: pour $[U, f] \in \mathcal{O}_{V,p}$ on choisit

$$p \in D(h) \subseteq U \text{ et } f|_{D(h)} = \frac{g}{h^m}$$

et $\Phi([U, f]) = \dfrac{g}{h^m}$

bien défini! homomorphisme.

Φ es injectif Supposons que $\Phi([U,f]) = 0 \in k[V]_{m_p}$

on écrit $[U,f] = \left[D(h), \frac{g}{h^m}\right]$

$\Rightarrow \Phi([U,f]) = \frac{g}{h^m} = 0 \in k[V]_{m_p}$

$\Rightarrow \exists q \notin m_p$ t.q. $qh^m g = 0 \in k[V]$

$\Rightarrow qh \notin m_p$ et $p \in D(qh)$

et

$$f\Big|_{D(qh)} = \underbrace{\left(\frac{q^m g}{(qh)^m}\right)}_{= 0} \in k[V]_{qh}$$

$[U,f] = [D(qh), f|_{qh}] = [D(qh), 0] = 0$ ✓

Φ est surjectif Soit $\frac{f}{g} \in k[V]_{m_p}$ avec

$f, g \in k[V]$, $g(p) \neq 0$

Alors $p \in D(g) \subseteq V$ et $\left[D(g), \frac{f}{g}\right] \in \mathcal{O}_{V,p}$

avec

$$\Phi\left(\left[D(g), \frac{f}{g}\right]\right) = \frac{f}{g} \qquad \square$$

CONCLUSION $\mathcal{O}_{V,P} = k[V]_{m_p}$ est un anneau local avec idéal maximal unique

$$"S_{m_p}^{-1} m_p" = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in m_p \\ g \notin m_p \end{array} \right\}$$

↳

$$k[V]_{m_p} \twoheadrightarrow \frac{k[V]_{m_p}}{(S_{m_p}^{-1} m_p)} = k$$

$$\frac{f}{g} \longmapsto \frac{f(P)}{g(P)} \in k$$

évaluation du germe à P

c-a-d : on a des anneaux locaux partout.

#

Déf. Un k-espace localement annelé est un k-espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ t.q.

$\forall P \in X$: La fibre $\mathcal{O}_{X,P}$ est un anneau local

Ex:

Pour V algébrique, $(V, \mathcal{O}_V)$ est localement annelé.

À quoi sert l'information des fibres ?

① Les intersections des composantes irréductibles

Soit $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ (décomposition en comp. irréductibles)

Fixons $p \in V \longleftrightarrow m_p \subseteq k[V]$

On a des bijections

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{idéaux premiers} \\ \text{de } \mathcal{O}_{V,p} = k[V]_{m_p} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{idéaux premiers } \mathfrak{p} \subseteq k[V] \\ \text{avec } \underbrace{\mathfrak{p} \cap (k[V] \setminus m_p) = \emptyset} \end{array} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathfrak{p} \subseteq m_p$$

$$\left\{ \frac{h}{g} \,\middle|\, \begin{array}{l} h|_Z = 0 \\ g(p) \neq 0 \end{array} \right\} \longleftarrow\!\shortmid \; I(Z)$$

$$= \left\{ [U, f] \mid f|_{Z \cap U} = 0 \right\}$$

$$Z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sous-ensembles irréductibles} \\ W \subseteq V \text{ avec } p \in W \end{array} \right\}$$

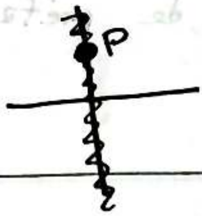
où

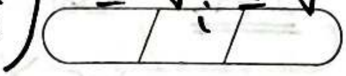
$$I(Z) = \left\{ h \in k[V] \,\middle|\, h|_Z = 0 \right\}$$

Proposition. Pour $p \in V$, $\mathcal{O}_{V,p}$ est un anneau intègre

$\iff \exists!\, i$ avec $p \in V_i$

Démo. "$\Leftarrow$" Supposons que $p \in V_i$ et $p \notin V_j \ \forall j \neq i$



Soit $\mathcal{U} = V_i \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} V_j \right) \subseteq V_i \subseteq V$ 

ouvert, avec $p \in \mathcal{U}$.

Donc $\mathcal{O}_{V,p} = \mathcal{O}_{\mathcal{U},p} = \mathcal{O}_{V_i,p}$

mais $k[V_i]$ est intègre

et donc $\mathcal{O}_{V_i,p}$ l'est aussi

"$\Rightarrow$" Si $p \in V_i \cap V_j$ avec $i \neq j$, alors

$\mathcal{O}_{V,p}$ contient deux idéaux premiers

$$\mathfrak{p}_i = I(V_i), \quad \mathfrak{p}_j = I(V_j)$$

Comme V_i, V_j sont maximaux, $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j$ sont maximaux dans $\mathcal{O}_{V,p}$

Mais si $\mathcal{O}_{V,p}$ est intègre, l'idéal $(0) = \{0\}$ est premier et l'unique premier minimal

$\#$ $\square$

(2) Propriétés des morphismes de faisceaux

Lemme. Un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ sur X induit un morphisme

$$\forall p \in X : \quad \varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$$
$$[\mathcal{U}, f] \longmapsto [\mathcal{U}, \varphi_{\mathcal{U}}(f)]$$

$p \in \mathcal{U} \subseteq X$, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ $\qquad$ $\varphi_{\mathcal{U}}(f) \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$

Exercice bien defini

Déf. Soit $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux sur X.

① φ est injectif si

$$\forall p \in X : \varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \text{ est injectif}$$

② φ est surjectif si

$$\forall p \in X : \varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \text{ est surjectif}$$

③ φ est un isomorphisme si

$$\varphi_p \text{ est un isomorphisme } \forall p \in X$$

Lemme/exercice Soit $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux

(1) φ est injectif $\Leftrightarrow$ $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ est injectif $\forall U \subseteq X$

(2) φ est un isomorphisme

$\Leftrightarrow$ φ_U l'est pour chaque $U \subseteq X$

$\Leftrightarrow$ φ admet un inverse $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$

t.q. $\forall U \subseteq X$: $\psi_U \circ \varphi_U = Id_{\mathcal{F}(U)}$

$\varphi_U \circ \psi_U = Id_{\mathcal{G}(U)}$

! Si φ_U est surjectif $\forall U \subseteq X$, alors φ est surjectif.

mais le converse n'est pas vraie!

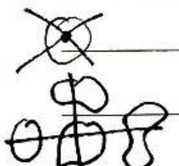
<u>Exemple</u> φ t.q. φ_p surj. mais φ_U ne l'est pas

Soit $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec la topologie ordinaire.

Soit $\mathcal{F}$ le faisceau avec

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{C} \text{ continues avec } f(p) \neq 0 \ \forall p \in U \right\}$$

Soit $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$
définit sur $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ par



$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$
$$f \longmapsto f^2$$

- Si $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est simplement connexe (pas de trous),

φ_U est surjectif : $\sqrt{\cdot}$ est bien definie

Chaque $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ admet un tel voisinage

donc φ_p est surjectif.

Soit $[U, f] \in \mathcal{F}_p$. Choisissons $p \in U' \subseteq U$ simplement connexe

$\Rightarrow \sqrt{f|_{U'}}$ est bien définie

$$\text{et } [U,f] = [U', f|_{U'}]$$
$$= [U', \varphi_{U'}(\sqrt{f|_{U'}})]$$
$$= \varphi_p([U', \sqrt{f|_{U'}}])$$

- Pour $U = X = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, φ_U n'est pas surjectif.

Considerons $f \in \mathcal{F}(X)$ donné par $f(re^{i\theta}) = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$

$\left(\text{bien defini : } f(re^{i(\theta+2\pi n)}) = f(re^{i\theta})\right)$

On aimerait considérer $\sqrt{f} : re^{i\theta} \longmapsto re^{i\theta/2}$

mais $e^{i(\theta+2\pi)/2} = -e^{i\theta/2}$

$\Rightarrow f \notin \mathrm{Im}(\varphi_U)$!!

Fin de l'exemple.

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces annelés avec

$$(\varphi, \tilde{\varphi}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

↳

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$$

Pour $P \in X$ avec $Q = \varphi(P) \in Y$ on obtient :

$$\mathcal{O}_{Y,Q} = \left\{ [U,s] \;\middle|\; \begin{array}{l} Q = \varphi(P) \in U \\ s \in \mathcal{O}_Y(U) \end{array} \right\}$$

$$\Big\downarrow \tilde{\varphi}_Q \qquad\qquad [U,s] \longmapsto [U, \tilde{\varphi}_U(s)]$$

$$(\varphi_* \mathcal{O}_X)_Q = \left\{ [U,t] \;\middle|\; \begin{array}{l} Q = \varphi(P) \in U \\ t \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}U) \end{array} \right\}$$

$$\Big\downarrow \cancel{\mathcal{O}_{X,P}} \qquad\qquad [U,t] \longmapsto [\varphi^{-1}U, t]$$

$$Q_{X,P} = \left\{ [W,t] \;\middle|\; \begin{array}{l} P \in W \\ t \in Q_X(W) \end{array} \right\}$$

<u>Déf.</u> $\tilde{\varphi}_P : \mathcal{O}_{Y,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$

$$[U,s] \longmapsto [\varphi^{-1}U, \tilde{\varphi}_U(s)]$$

<u>exercice:</u> bien définie, homomorphisme d'algèbres.

<u>Rappel</u> Soit $(\varphi, \tilde{\varphi}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces annelés et soit $P \in X$.

On obtient $\tilde{\varphi}_P : \mathcal{O}_{Y,\varphi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$

$$[U, f] \longmapsto [\varphi^{-1}(U), \tilde{\varphi}_U(f)]$$

$$\varphi(P) \in U \subseteq Y \qquad P \in \varphi^{-1}(U) \subseteq X$$

$$f \in \mathcal{O}_Y(U) \qquad \tilde{\varphi}_U(f) \in \varphi_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}U)$$

<u>Définition</u> (1) Soient (A, m) et (B, n) deux anneaux locaux. Un morphisme d'anneaux locaux est un homomorphisme d'anneaux

$$F : A \longrightarrow B \text{ t.q. } F(m) \subseteq n$$

(2) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ localement annelés. Un morphisme $(\varphi, \tilde{\varphi})$ d'espaces annelés t.q.

$\forall P \in X$: $\tilde{\varphi}_P$ est un morphisme d'anneaux locaux.

<u>Ex.</u> Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $F(m) \subseteq n$

(2) $F^{-1}(n) = m$

(3) $\forall a \in A$: si $F(a) \in B$ est inversible, alors a est inversible dans A.

Lemme. Pour $\varphi : V \to W$ régulière $(\varphi, \tilde{\varphi})$ est un morphisme d'espaces localement annelés.

Démo. Soit $P \in V$ avec $Q := \varphi(P) \in W$.

$$m_P \subseteq k[V] \qquad m_Q = (\varphi^*)^{-1}(m_P) \subseteq k[W].$$

On étudie

$$\tilde{\varphi}_P : \mathcal{O}_{W,Q} = k[W]_{m_Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,P} = k[V]_{m_P}$$

$$\frac{f}{h} \longmapsto \frac{\varphi^* f}{\varphi^* h}$$

avec $h \notin m_Q$
$(\Leftrightarrow \varphi^* h \notin m_P)$

Est-ce que $\tilde{\varphi}_P$ (idéal max) $\subseteq$ idéal maximal ?

$\frac{f}{h} \in$ idéal max de $k[W]_{m_Q}$

$\Leftrightarrow f \in m_Q$

$\Leftrightarrow \varphi^* f \in m_P$

$\Leftrightarrow \frac{\varphi^* f}{\varphi^* h} \in$ idéal max de $k[V]_{m_P}$

Hilroy

RESUMÉ DU COURS.

Soit $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n$ un ensemble algébrique ~~déterminé~~

déterminé $\mathfrak{a} = I(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$

radiciel

On obtient:

une alg. finiment engendré et reduit.

(I) $k[V] = k[X_1, \dots, X_n] / I(V)$ anneau de coordones (*)

(II) $(V, \mathcal{O}_V)$ un espace localement annelé sur k.

- points $p \longleftrightarrow m_p \subseteq k[V]$ maximal
- topologie de Zariski
  - base d'ouverts $D(h) \subseteq V$ $(h \in k[V])$
  - avec intersections

$$D(h_1) \cap D(h_2) = D(h_1 h_2)$$

- faisceau de fonctions régulières:

$$\mathcal{O}_V(D(h)) := \{ f : D(h) \longrightarrow k \text{ régulière} \}$$

$$\cong k[V]_h$$

fibres: $\mathcal{O}_{V,p} \cong k[V]_{m_p}$

Hilroy

Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ une application régulière

On obtient

(1) $\varphi^* : k[W] \longrightarrow k[V]$ homomorphisme

(2) $(\varphi, \tilde{\varphi}) : (V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ morphisme d'espaces localement annelés.

- φ déterminé par $m_{\varphi(Q)} = (\varphi^*)^{-1}(m_P)$
- $\tilde{\varphi}$ déterminé sur la base par

$$\tilde{\varphi}_{D(h)} : \mathcal{O}_W(D(h)) \longrightarrow \mathcal{O}_V(D(\varphi^* h))$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ k[W]_h & \cancel{\longrightarrow} & k[V]_{\varphi^* h} \end{array}$$

$$\frac{f}{h^m} \longmapsto \frac{\varphi^* h}{(\varphi^* h)^m}$$

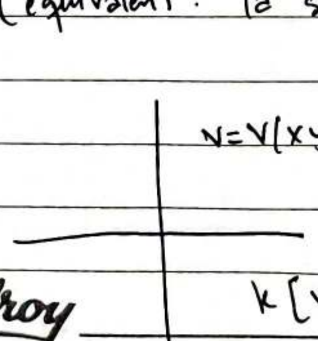
Remarque. (I) & (II) sont équivalentes.

tout est déterminé au niveau des algèbres $k[V]$

(*) contient un peu plus d'info: l'inclusion de V dans $\mathbb{A}^n$

(équivalent: la surjection $k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k[V]$)

$V = V(xy)$



$k[V] = \dfrac{k[X,Y]}{(XY)}$

$V((x-y)(x+y)) = W$

$k[W] = \dfrac{k[X,Y]}{(X-Y)(X+Y)}$

I need to understand this example.

Déf. • Une variété (algébrique) affine sur k est un espace (localement) annelé sur k qui est isomorphe à $(V, \mathcal{O}_V)$ pour V un ensemble algébrique et $\mathcal{O}_V$ les fonctions régulières

• Un morphisme de variétés affines est un morphisme d'espaces localement annelés.

Exemple. Pour chaque ensemble algébrique $V \subseteq \mathbb{A}^n$,

$$(V, \mathcal{O}_V) \text{ est une variété affine.}$$

Mais il sera parfois utile de travailler avec des espaces sans spécifier un plongement $V \hookrightarrow \mathbb{A}^n$.

Def. Une k-algèbre affine est une k-algèbre A qui est

(a) réduit et
(b) finiment engendrée

Construction / proposition Soit A une k-algebre affine.

(1) A détermine une variété affine $\operatorname{Spm} A$.

(2) Un choix de générateurs $\{x_1, \dots, x_n\}$ pour A détermine un isomorphisme entre $\operatorname{Spm} A$ et $(V, \mathcal{O}_V)$ pour un ouvert $V \subseteq \mathbb{A}^n$ algébrique

Hilroy

Démo. Posons $\mathrm{spm}(A) = \{ m \subseteq A \mid m \text{ idéaux max} \}$

$\quad$ ↳ "spectre maximale de A"

On définit une topologie sur spmA, avec base d'ouverts

$$\{ D(h) \mid h \in A \}$$

où $D(h) = \{ m \in \mathrm{spm}(A) \mid h \notin m \}$

Vmq l'intersection d'un ~~morphisme~~ nombre fini d'ensembles ~~algébriques~~ basiques est une union d'ensembles basiques.

En effet,
$$D(h_1) \cap \cdots \cap D(h_k) = D(\underbrace{h_1 \cdots h_k}_{\text{produit}}).$$

On definit un faisceau d'algèbres sur spmA, en spécifiant ses valeurs sur la base

$$\mathcal{O}_A(D(h)) = A_h$$

avec restrictions : pour $D(h_1) \subseteq D(h_2)$ on a $h_1^N = h_2 g$

Donc, on peut définir

$$\begin{aligned} A_{h_2} &\longrightarrow A_{h_1} \\ \frac{f}{h_2^M} &\longmapsto \frac{g^M f}{h_1^{MN}} \end{aligned}$$

Hilroy

on peut démontrer que c'est compatible avec composition

$$\left(D(h_1) \subseteq D(h_2) \subseteq D(h_3) \right)$$

On peut démontrer que $\mathcal{O}_{A,m} \cong A_m$ (local !)

$\rightsquigarrow \underbrace{(\operatorname{spm} A, \mathcal{O}_A)}_{\operatorname{Spm} A.}$ est un espace localement annelé

(2) Choisissons un ensemble de générateurs pour A :

$$\{x_1, \dots, x_n\}$$

↳ on obtient $\pi : k[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow A$

$$X_i \longmapsto x_i$$

Soit $I = \ker(\pi)$, donc

$$\frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I} \xrightarrow{\sim} A$$

$$A \text{ réduite} \iff I \text{ radiciel}$$

Si on définit $V := V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ on a $k[V] \xrightarrow[\text{"}\varphi^*\text{"}]{\sim} A$

<u>BUT</u> On prétend que $\operatorname{Spm} A \cong (V, \mathcal{O}_V)$.

Hilroy

2025-11-14 [Vendredi]

<u>Rappel</u> • Une variété affine sur k est un k-espace annelé $(V, \mathcal{O}_V)$ qui est isomorphe à l'espace annelé associé à un ensemble algébrique.

• on note $k[V] := \mathcal{O}_V(V)$

• Une k-algèbre affine est une k-algèbre A qui est finiment engendrée et réduite.

• Pour A une k-algèbre affine, on définit un espace annelé

$$\mathrm{Spm} A = (\mathrm{spm} A, \mathcal{O}_A)$$

avec

• $\mathrm{spm} A = \{ m \mid m \subseteq A \text{ maximal} \}$

• base de la topologie $D(a) = \{ m \mid a \notin m \}$, $a \in A$.

• $\mathcal{O}_A(D(a)) = A_a$

• On veut démontrer :

Pour $\{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble générateur de A, la surjection $\pi : k[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow A$, $X_i \longmapsto x_i$

avec $I = \ker(\pi)$ (réduit) induit un isomorphisme d'algèbres $\frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I} \xrightarrow[F]{\sim} A$ et un isomorphisme d'espaces annelés

$$\mathrm{Spm}(A) \xrightarrow{\sim} (V(I), \mathcal{O}_{V(I)})$$

$$\overset{\shortparallel}{V}$$

Je pense qu'elle veut dire que A est réduit et donc I est radical

• F induit des bijections

$$\{m \in \operatorname{spm} A\} \longleftrightarrow \{m_p \subseteq k[V] \text{ max}\} \longleftrightarrow \{P \in V\}$$

$$m \longmapsto F^{-1}(m)$$

qui envoient les ensembles basiques ouverts de $\operatorname{spm} A$ à ceux de V

$$\varphi^{-1}(D(h)) = D(F(h))$$

$\Rightarrow$ On obtient un homomorphisme

$$\varphi : \operatorname{spm} A \longrightarrow V$$

• Il nous reste à définir $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_V \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_A$ sur $D(h) \subseteq V$.

$$\tilde{\varphi}_{D(h)} : \mathcal{O}_V(D(h)) \longrightarrow \mathcal{O}_A(\varphi^{-1}(D(h)))$$

$$\varphi^{-1}(D(h)) = D(F(h))$$

$\hookrightarrow$ $\tilde{\varphi}_{D(h)} : k[V]_h \longrightarrow A_{F(h)}$

$$\frac{f}{h^m} \longmapsto \frac{F(f)}{F(h)^m}$$

à vérifier : – compatible avec la restriction
– isomorphismes $\forall D(h)$

$\Rightarrow$ Donc $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme de faisceaux

<u>comparer</u> : pour $\varphi : V \longrightarrow W$ régulière,

$$\varphi^* : k[W] \longrightarrow k[V]$$

$$\tilde{\varphi}_{D(h)} : k[W]_h \longrightarrow k[V]_{\varphi^* h}$$

conclusion $\operatorname{Spm} A = (\operatorname{spm} A, \mathcal{O}_A)$ est une variété affine.

Proposition. Soit $F : A \to B$ un homomorphisme d'algèbres affines. Alors on obtient un morphisme de variétés affines.

$$(\varphi, \tilde{\varphi}) : \operatorname{Spm} B \longrightarrow \operatorname{Spm} A$$

avec

- $\varphi : m \in \operatorname{spm} B \longmapsto F^{-1} m \in \operatorname{spm} A$
- $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_A \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_B$ donné sur

$D(a) \subseteq \operatorname{spm} A$ par

$$\tilde{\varphi}_{D(a)} : A_a \longrightarrow B_{F(a)}$$

$$\frac{f}{a^m} \longmapsto \frac{F(f)}{F(a)^m}$$

Détails : exercice.

Théorème. On a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Var}_k^{\mathrm{aff}} \longrightarrow \left(\mathrm{Alg}_k^{\mathrm{aff}}\right)^{op}$$

Des espaces annelés (espace top + faisceau d'algèbres)

$$(V, \mathcal{O}_V) \longmapsto k[V] := \mathcal{O}_V(V)$$

$$\operatorname{Spm} A \longleftarrow A$$

Démo omis.

¿Pourquoi est-ce que on a travaille si dur pour contruire une categorie qu'est esentiallement le categorie des anneaux?

Hilroy Réponse: $\left(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{aff}}\right)$ est plus facil à generaliser

Remarque Les ensembles fermés de $\operatorname{spm} A$ sont tous de la forme

$$V(\mathfrak{a}) = \{ m \in \operatorname{spm} A \mid \mathfrak{a} \subseteq m \}$$

avec $\mathfrak{a}$ radiciel

Alors il y a une bijection Ensembles fermés $\longleftrightarrow$ idéaux radiciels

Fait Chaque ensemble fermé admet une structure naturelle de variété affine.

Rmq pour $U \subseteq V$ ouvert, on peut restreindre un faisceau $\mathcal{F}$ sur V à $\mathcal{F}|_U$. C'est important que U soit ouvert. N'est pas posible pour un sous-ensemble fermé.

Démo (du fait) Pour $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{spm} A$ avec $\mathfrak{a}$ radiciel, $A/\mathfrak{a}$ est une k-algèbre affine.

$$\Longrightarrow \operatorname{Spm}(A/\mathfrak{a}) \text{ est une variété affine.}$$

L'homomorphisme $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ nous donne une application

$$\varphi : \operatorname{Spm}(A/\mathfrak{a}) \longrightarrow \operatorname{spm}(A)$$

$$m \longmapsto \pi^{-1}(m)$$

- son image est $\{ \underset{\max?}{m \subseteq A} \mid \mathfrak{a} \subseteq m \} = V(\mathfrak{a})$

et on obtient un homeomorphisme $\operatorname{Spm}(A/\mathfrak{a}) \xrightarrow{\varphi} V(\mathfrak{a})$

- On définit $\mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})} := \varphi_* \mathcal{O}_{A/\mathfrak{a}}$ sur $V(\mathfrak{a})$

$$\left(V(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})} \right) \xleftarrow{(\varphi_i, \tilde{\varphi})} \left(\operatorname{spm}(A/\mathfrak{a}), \mathcal{O}_{A/\mathfrak{a}} \right)$$

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})} \overset{= \varphi_* \mathcal{O}_{A/\mathfrak{a}}}{\longrightarrow} \varphi_*(\mathcal{O}_{A/\mathfrak{a}})$$ on prend $\tilde{\varphi} = \mathrm{Id}$

Autrement dit. Quand on a deux esp. topologiques homéomorphes et un est un espace annelé, alors on peut prendre/mettre le même faisceau sur l'autre espace, et donc il devient aussi un espace annelé (isomorphe.)

Définition. $V(\mathfrak{a})$ (muni de ce faisceau) est un sous-variété (affine) fermée de $\operatorname{Spm} A$.

Exercice Soit $\varphi : \operatorname{Spm}(A) \hookrightarrow \operatorname{Spm}(B)$ un morphisme de variétés. Alors

φ est un plongement fermé (closed embedding)
$\iff \varphi^* : B \to A$ est surjectif.

Proposition. Soit $\operatorname{Spm}(A)$ une variété affine et $a \in A \setminus \{0\}$. Alors l'ensemble ouvert $D(a)$ est naturellement une variété affine:

$$\left(D(a), \mathcal{O}_A\big|_{D(a)}\right) \cong \operatorname{Spm}(A_a)$$

restriction du faisceau

Démonstration. L'homomorphisme $i : A \to A_a : b \longmapsto \frac{b}{1}$ ~~définit~~ nous donne

$$\varphi : \operatorname{spm}(A_a) \longrightarrow \operatorname{spm} A$$
$$\mathfrak{m} \longmapsto i^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \cap A$$

avec image

$$\{\mathfrak{n} \subseteq A \mid \underbrace{\mathfrak{n} \cap S_a = \emptyset}_{\Updownarrow \; a \notin \mathfrak{n}}\} = D(a)$$

(S_a : ensemble multiplicatif)

Hilroy

c'est un homeomorphisme dans $D(a) \subseteq \mathrm{spm}(A)$ avec inverse

$$\psi : D(a) \longrightarrow \mathrm{spm}(A_a)$$

$$\mathfrak{n} \longmapsto S_a^{-1}\mathfrak{n}$$

· Il nous reste à démontrer que pour $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{spm}(A_a)$ ouvert basique

$$\mathcal{O}_{A_a}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{O}_{D(a)}(\psi^{-1}(\mathcal{U})).$$

Si $\mathcal{U} = D(f/a^m)$

$$= \{ \tilde{m} \subseteq A_a \mid \tfrac{f}{a^m} \notin \tilde{m} \} = \{ \tilde{m} \subseteq A_a \mid f \notin \tilde{m} \}$$

· $\mathcal{O}_{A_a}(\mathcal{U}) = (A_a)_f \underset{\uparrow}{\cong} A_{af}$

localization de la localization ≡ loc. du produit

· $\psi^{-1}(\mathcal{U}) = \{ m \subseteq A \mid f \notin m \text{ et } a \notin m \}$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{D(a)}(\psi^{-1}(\mathcal{U})) \underset{\uparrow}{=} \mathcal{O}_A(\psi^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{O}_A(D(af)) = A_{af} \quad \square$$

car $\mathcal{O}_{D(a)} = \mathcal{O}_A|_{D(a)}$

∴ CONCLUSION $D(a)$ est isomorphe à un ensemble algèbrique $V \subseteq k^n$

Lequel? et quel n? (Il faut monter le n par $+1$)

Idée clé. $\forall$ anneau A et $a \in A$, on a un isomorphisme

$$A_a \xrightarrow{\ \sim\ } A[Y]/(1-aY) : \frac{f}{a^m} \longmapsto fY^m + (1-aY)$$

Donc: $D(a) \cong \mathrm{Spm}(A_a) \cong \mathrm{Spm}(A[Y]/(1-aY))$

$$\begin{array}{ccc}
D(a) & & \mathrm{Spm}(A[Y]/(1-aY)) \\
\cap \leftarrow \text{ouvert} & & \cap \leftarrow \text{fermé} \\
\mathrm{Spm}(A) & & \mathrm{Spm}(A[Y]) \\
\cap \leftarrow \text{fermé} & & \cap \leftarrow \text{fermé} \\
\mathbb{A}^n & & \mathbb{A}^{n+1}
\end{array}$$

même n: $\dfrac{k[X_1,\dots,X_n]}{I} \cong A$

$$\frac{k[X_1,\dots,X_n,Y]}{I} \cong A[Y]$$

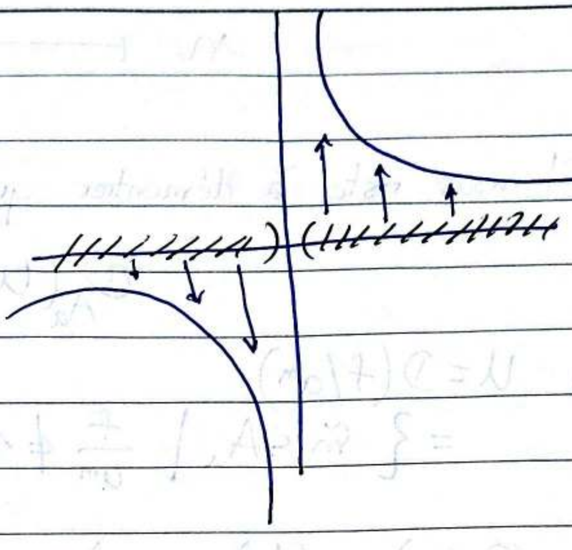
$$\frac{k[X_1,\dots,X_n,Y]}{(I, 1-aY)} \cong \frac{A[Y]}{(1-aY)}$$

Exemple $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = D(X) \ni p \neq 0.$

$$\uparrow$$

$$A \doteq k[X],\quad a = X$$

• $k[X]_X \cong \dfrac{k[X,Y]}{(1-XY)}$



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1\setminus\{0\} = \{p\in k \mid p\neq 0\} & & \\ \Big\downarrow s & & p \Big\downarrow \\ V(1-XY) \ni (p, \tfrac{1}{p}) & & \end{array}$$

! mais les sous-ensembles ouverts $\mathcal{U} \subseteq (V, \mathcal{O}_V)$ qui ne sont pas basiques donnent des espaces annelés $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_V|_{\mathcal{U}})$ qui ne sont pas nécessairement des variétés affines

Le meilleur que on peut faire... pour $\mathcal{U} = \bigcup_{\lambda} D(a_\lambda)$ union d'ensembles basiques

$\mathcal{U}$ est "localement" affine mais pas nécessairement affine.

This motivates the following définition.

Définition. Une prévariété algébrique est un k-espace annelé $(V, \mathcal{O}_V)$ qui admet un recouvrement fini par variétés affines.

On va voir l'espace projectif.

• Deuxième remise devoir 8 mardi prochain.

Rappel une propriété (algébrique) sur k est un espace annelé $(V, \mathcal{O}_V)$ sur k t.q. ⌜∃ recouvrement fini

$$V = \bigcup_{i=1}^{N} U_i \quad \text{t.q.}$$

$$\forall i : \left(U_i, \mathcal{O}_V|_{U_i}\right) \text{ est une variété affine} \lrcorner$$

Equivalente. 1) V est quasi-compacte

2) $\forall p \in V$, $\exists$ un voisinage ouvert $p \in U \subseteq V$ t.q.

$$(U, \mathcal{O}_V|_U) \text{ est une variété affine.}$$

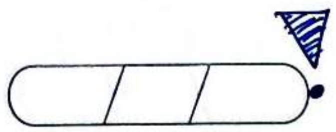
Définition. Un sous-ensemble ouvert $U \subseteq V$ t.q. $(U, \mathcal{O}_V|_U)$ est une variété affine est une (sous-variété) ouverte affine.

Exemple. pour $(V = V(I), \mathcal{O}_V)$ et $h \in k[V]$,

$D(h)$ est une ouverte affine.

Exercice. Soit $(V, \mathcal{O}_V)$ une prévariété. Alors les ouverts affine forment une base de la topologique de V

Hilroy



L'intersection de deux ouverts affines n'est pas nécessairement affine.

<u>Remarque.</u> Une prévariété est un espace localement annelé.

Pour $p \in V$, soit $\mathcal{U}$ un voisinage affine :

$$\mathcal{U} \cong \mathrm{Spm}(A)$$

$$\begin{matrix} \Psi \\ p \longleftrightarrow \mathfrak{m} \end{matrix}$$

$$\mathcal{O}_{V,p} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U},p} \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Spm} A, \mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$$

anneau local

$$\begin{matrix} \Psi \\ [W, f] \longmapsto [W \cap \mathcal{U}, f|_{W \cap \mathcal{U}}] \end{matrix}$$

$p \in W \subseteq V$

$f \in \mathcal{O}_V(W)$

$\therefore$ son quotient par l'unique idéal maximal est un corps K, finiment engendré sur k.

(car A est finiment engendrée)

$\therefore$ (si $k = \bar{k}$) Zariski $\Rightarrow$ $k = K$.

$(V, \mathcal{O}_V)$ prévariété

<u>Fait.</u> Les sections $f \in \mathcal{O}_V(\mathcal{U})$ peuvent être interprétées comme fonctions

$$\tilde{f} : \mathcal{U} \longrightarrow k$$

$$p \longmapsto [\mathcal{U}, f] + \mathfrak{m}_p \in \mathcal{O}_{V,p} / \mathfrak{m}_p = k$$

this is kept fixed

Exemple $V = k$, $\mathcal{O}_V(D(h)) = k[V]_h$

pour $p \in k$, $\mathcal{O}_{V,p} = k[X]_{(X-p)}$

$f \in k[X]$ $\quad \tilde{f}(p) = [V, f] + m_p \in \dfrac{\mathcal{O}_{V,p}}{m_p}$

$f = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$

$$m_p = \left\{ \frac{g(X)}{h(X)} \;\middle|\; \begin{array}{l} g(p) = 0 \\ h(p) \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \dfrac{k[X]_{(X-p)}}{m_p} & \xrightarrow{\sim} & k \\ \dfrac{g(X)}{h(X)} + m_p & \longmapsto & \dfrac{g(p)}{h(p)} \end{array}}$$

$$f + m_p \longmapsto f(p)$$

$\tilde{f}$ est la fonction donnée par le polynôme f.

<u>A vérifier.</u> on obtient une fonction continue (top. de Zariski sur P, top. donée sur $U \subseteq V$)

compatibles avec la restriction

$$U' \subseteq U \subseteq V$$

$$\begin{array}{ccc} f|_{U'} & \longleftarrow\!\shortmid & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{f}|_{U'} = \widetilde{f|_{U'}} & \longleftarrow\!\shortmid & \tilde{f} \end{array}$$

Hilroy

- $f, g \in \mathcal{O}_V(U)$ donnent $\tilde{f} = \tilde{g} \iff f = g$

Si U est affine, $U \cong V(I)$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_V(U) & \cong & \mathcal{O}_{V(I)}\big(V(I)\big) \\ & & = k[V(I)] \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longleftrightarrow & \hat{f} \end{array}$$

fonction régulière sur $V(I)$

alors

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & V(I) \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

<u>Définition.</u> Soit $(V, \mathcal{O}_V)$ une prévariété et $U \subseteq V$ un ouvert quelconque.

Une fonction $\phi : U \longrightarrow k$ est régulière si

$$\exists f \in \mathcal{O}_V(U) \text{ t.q. } \phi = \tilde{f}$$

- Une critère pour savoir si un ouvert d'un espace annelé est affine.

Soit $(V, \mathcal{O}_V)$ un espace ~~annelé~~ localement annelé $/k$.

On a une application

$$U \longrightarrow \operatorname{spm} \overbrace{\mathcal{O}_V(U)}^{\text{anneau}} \quad (*)$$

$$p \longmapsto \{ f \in \mathcal{O}_V(U) \mid \tilde{f}(p) \neq 0 \}$$

idéal max de $\mathcal{O}_V(U)$

($f \notin m_p$
idéal max de la fibre à p)

quotient

$$\frac{\mathcal{O}_V(U)}{\text{idéal}} \xrightarrow{\sim} k$$

$$f + I \longmapsto f(p)$$

Si $U \cong \operatorname{Spm} A$ est affine, alors $\mathcal{O}_V(U) \cong A$.

$$\operatorname{spm}(\mathcal{O}_V(U)) \cong \operatorname{spm}(A) \cong U$$

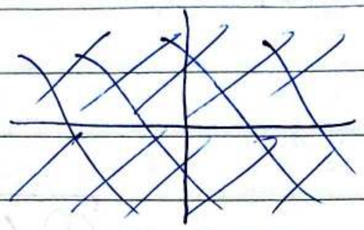
et $(*)$ est une bijection.

Alors si $(*)$ n'est pas une bijection,

U n'est pas affine!

Exemple Soit $U = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2$.

On peut écrire $U = D(X) \cup D(Y)$



Mais, peut-on écrire $U \cong \operatorname{Spm} A$ pour une seule algèbre A ?

Il faut comprendre $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U)$.

Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U)$.

$$f\big|_{D(X)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}\big(D(X)\big) = k[X]_X$$

$\Rightarrow \exists g \in k[X,Y]$ et $n \geq 0$ (supp. que n est minimal : $X \nmid g(X)$)

t.q. $\forall (x,y) \in D(X)$ on a $f(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{x^n}$

$\Updownarrow$

$x \neq 0$

• de même, $\exists h(X,Y) \in k[X,Y]$ avec $Y \nmid h(X,Y)$

$\exists m \geq 0$

t.q. $\forall (x,y)$ avec $y \neq 0$ on a $f(x,y) = \dfrac{h(x,y)}{y^m}$

$\Rightarrow \forall (x,y)$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$

on a $\quad (\Leftrightarrow (x,y) \in D(X) \cap D(Y))$

$$\frac{g(x,y)}{x^n} = \frac{h(x,y)}{y^m}$$

 $\Rightarrow Y^m g(X,Y) = X^n h(X,Y)$

Il suit que $n = m = 0$ car $X + g(X,Y)Y^m$
et donc $g(X,Y) = h(X,Y) = f$

$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U) \cong k[X,Y]$

$\Rightarrow \operatorname{spm} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U) = \mathbb{A}^2$

et ⊛ devient l'inclusion $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{A}^2$.

pas bijective !

$\Rightarrow \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est non-affine.

<u>EXEMPLE</u> (L'ESPACE PROJECTIF $\mathbb{P}^n_k$)

Considérons l'ensemble $\mathbb{P}^n = k^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$
où
$$(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \quad \forall \lambda \in k^*$$

on écrit $[x_0 : \dots : x_n]$

pour la classe de $(x_0, \dots, x_n)$

<u>BUTS</u> 1) $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ est un espace annelé

2) ce n'est pas une variété affine

3) c'est une prévariété : $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$
où
$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}) \text{ est affine } \forall i$$

Définition un polynôme $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ est homogène de degré d si

$$f = \sum_{i_0 + i_1 + \dots + i_n = d} a_{i_0 i_1 \cdots i_n} X_0^{i_0} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

avec

$$a_{i_0 i_1 \cdots i_n} \in k$$

Exemple $5 X_0 X_1 X_2 + X_2^3$ (degré 3)

Prop/exercice Si k est un corps infini, alors

$f \in k[X_0, \dots, X_n]$ est homogène de degré d.

$$\Longleftrightarrow \forall \lambda \in k : f(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n) = \lambda^d f(X_0, \dots, X_n)$$

Hilroy

2025-11-21 [Vendredi] [Video]

LA TOPOLOGIE DE ZARISKI SUR $\mathbb{P}^n$

Rappel

$$\mathbb{P}^n = \{ [x_0 : \cdots : x_n] \mid (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0,\ldots,0)\} \}$$

où

$$[\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n] = [x_0 : \cdots : x_n] \quad \forall \lambda \in k^*$$

- On veut
  - définir une topologie sur $\mathbb{P}^n$
  - " un faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$
  - démontrer que $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ est une prévariété non-affine

- Pour $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogène de degré d et $\lambda \in k$,

$$f(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d f(X_0, \ldots, X_n)$$

Obs 1 La fonction $f : k^{n+1} \longrightarrow k$ donnée par un polynôme $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ (homogène ou non) ne donne pas une fonction sur le quotient

$$\mathbb{P}^n = k^n \setminus \{0\} /_{\sim}$$

car $f(x_0, \ldots, x_n) \neq f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$ en général

(ça marche seulement si f est constant)

MAIS Si f est homogène, alors

$$f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \iff f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0 \quad \forall \lambda \in k^*$$

Donc On peut utiliser un polynôme homogène pour définir un sous-ensemble

$$V(f) = \{ [x_0, \ldots, x_n] \mid f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \}$$

Observation 2 Chaque polynôme $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ s'écrit uniquement comme une somme des polynômes homogènes.

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_N \quad \text{où } f_i \text{ homogène de } \deg = i.$$

Exemple Dans $k[X_0, X_1]$,

$$f = \alpha X_0 + \beta X_0^2 + \gamma X_1 + \delta X_0 X_1 + \varepsilon X_1^3$$

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \quad f_2 \quad f_3$$

$$\deg 0 \quad \deg 1 \quad \deg 2 \quad \deg 3$$

Définition. Un idéal $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ est homogène si

$\forall$ polynôme $f = f_0 + \dots + f_N$ avec f_i homog. $\deg = i$

on a que
$$f_i \in \mathfrak{a} \quad \forall i = 0, \dots, N$$

Exemple • $\mathfrak{a} = \langle X_0^2 + X_1 \rangle$ n'est pas homogène !

$$f_2 = X_0^2 \notin \mathfrak{a}, \quad f_1 = X_1 \notin \mathfrak{a}$$

• $\mathfrak{b} = \langle X_0^2 + X_1^2 \rangle$ est un idéal homogène car $X_0^2 + X_1^2$ est homogène

Détails : exercice.

Exercice. (Lemme) Un idéal $\mathfrak{a} \leqslant k[X_0, \dots, X_n]$ est homogène

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a}$ est ~~homogène~~ engendré par des polynômes homogènes

Hilroy

On obtient des applications

$$\left\{\begin{array}{c}\text{idéaux homogènes} \\ \mathfrak{a} \subseteq k[X_0,\dots,X_n]\end{array}\right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{sous-ensembles} \\ X \subseteq \mathbb{P}^n\end{array}\right\}$$

où

condition bien défini (why?)

- $V(\mathfrak{a}) := \{[P] \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{a} \text{ homogène}\}$

class d'équivalence representant

souvent, on ne fait pas distinction

- $I(X) := \{f \in k[X_0,\dots,X_n] \mid f(x_0,\dots,x_n) = 0 \quad \forall [x_0,\dots,x_n] \in X\}$

Exercice $I(X)$ est un idéal homogène et radiciel

Notation. On écrit maintenant (pour les ensembles alg. de $\mathbb{A}^{n+1}$):

"le cone affine" sur $V(\mathfrak{a})$ $\longrightarrow$ $V^{aff}(\mathfrak{a}) = \{Q \in \mathbb{A}^{n+1} \mid f(Q) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{a}\}$

Alors

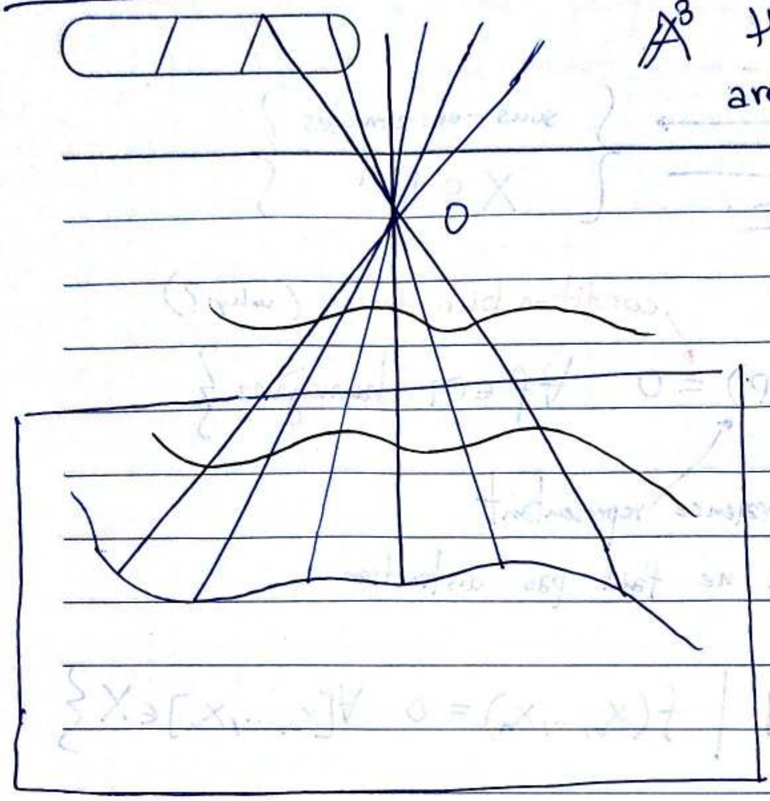
$$V(\mathfrak{a}) = V^{aff}(\mathfrak{a}) \setminus \{0\} / \sim$$

Rmq si on écrit $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, alors

$$V^{aff}(\mathfrak{a}) = \pi^{-1}(V(\mathfrak{a})) \cup \{0\}$$

Donc on peut passer de $\mathbb{A}^{n+1}$ à $\mathbb{P}^n$ et viceversa

Illustration



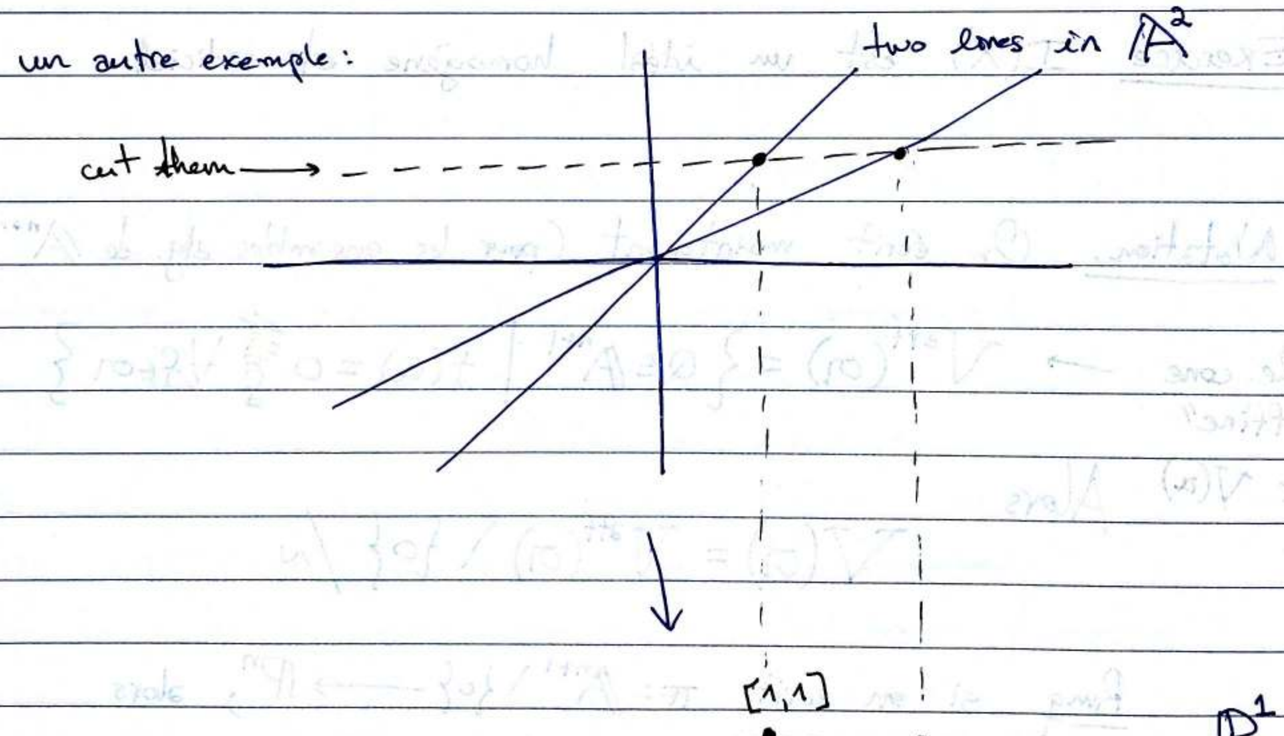
$\mathbb{A}^3$ these lines passing by the origin are $V^{aff}(\mathfrak{a})$

0

$\mathbb{P}^2$

cut the cone with a plane to see $V(\mathfrak{a})$ in $\mathbb{P}^2$.

un autre exemple:



<u>key</u> si on connaît $V^{aff}(\mathfrak{a})$, on connaît $V(\mathfrak{a})$

si on connaît $V(\mathfrak{a})$, on connaît $V^{aff}(\mathfrak{a})$

$\therefore$ On peut utiliser les propriétés de $V^{aff}(\mathfrak{a})$ pour déduir les propriétés de $V(\mathfrak{a})$ — important

Exemple $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ pour des idéaux homogènes?

Théorème [Le théorème des zéros des idéaux homogènes]

Soit $k = \bar{k}$ et $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ un idéal homogène. Alors

(1) $V(\mathfrak{a}) = \emptyset \iff \text{rad}(\mathfrak{a}) \supseteq (X_0, \dots, X_n)$

! comparer $V^{aff}(\mathfrak{a}) = \emptyset \iff 1 \in \mathfrak{a}$

(2) Si $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, $I(V(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$

(3) Pour $X \subseteq \mathbb{P}^n$ algébrique, $V(I(X)) = X$

Démo (1) $V(\mathfrak{a}) = \emptyset \iff V^{aff}(\mathfrak{a}) \subseteq \{(0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$

$\iff \text{rad}(\mathfrak{a}) \supseteq I(0, \dots, 0) = (X_0, \dots, X_n)$

(2) Pour $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, $I(V(\mathfrak{a})) = I(V^{aff}(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$

(3) Pour $X = V(\mathfrak{a})$, $V(I(X)) = V(I(V(\mathfrak{a}))) = V(\text{rad}(\mathfrak{a}))$

même preuve pour le cas affine $= V(\mathfrak{a})$

Remarque L'idéal $(X_0, \dots, X_n)$ est appelé l'idéal non-pertinent [the irrelevant ideal]

- Dans $\mathbb{P}^n$ ~~on~~ n'ai pas le zero.

Hilroy

Corollaire. V et I nous donnent des bijections

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{idéaux radiciels homogènes}\\ \mathfrak{a}\subseteq k[X_0,\dots,X_n] \text{ avec}\\ \mathfrak{a}\neq (X_0,\dots,X_n)\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{sous-ensembles}\\ \text{algébriques de}\\ \mathbb{P}^n\end{array}\right\} \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\
\left\{\begin{array}{c}\text{idéaux premiers}\\ \text{homogènes avec}\\ \mathfrak{a}\neq (X_0,\dots,X_n)\end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{sous-ensembles}\\ \text{algébriques}\\ \text{irréductibles}\end{array}\right\}
\end{array}$$

Définition. La topologie de Zariski sur $\mathbb{P}^n$ est définie par

$$Z\subseteq \mathbb{P}^n \text{ est fermé} \iff \exists\, \mathfrak{a}\subseteq k[X_0,\dots,X_n] \text{ homogène (et radiciel) tel que } Z=V(\mathfrak{a})$$

radiciel n'est pas necessaire (mais il nous donne l'unicité)

2025-11-25 [Mardi]

Rappels • $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0,\dots,X_n]$ est homogène

si

$\forall f = f_0 + \dots + f_N \in \mathfrak{a}$ avec f_i homogène deg i

chaque $f_i \in \mathfrak{a}$

• topologie de Zariski sur $\mathbb{P}^n$

fermés $\underset{\mathfrak{a} \text{ homogène}}{\mathbb{V}(\mathfrak{a})} = \left\{ [X_0 : \dots : X_n] \;\middle|\; \begin{array}{c} f(x_0,\dots,x_n) = 0 \\ \forall f \in \mathfrak{a} \end{array} \right\}$

BUT définir les "fonctions régulières sur les sous-ensembles ouverts de $\mathbb{P}^n$ pour ~~définir~~ obtenir un faisceau

Problème. Un polynôme $f \in k[X_0,\dots,X_n]$ nous donne une fonction bien définie sur $\mathbb{P}^n \iff f$ constante

Définition Soit $V \subseteq \mathbb{P}^n$ fermé (par exemple $V = \mathbb{P}^n$) une fonction rationnelle sur V est une fonction partiellement définie $f : V \dashrightarrow k$ donné par

$$f(p) = \frac{g(p)}{h(p)} \quad \text{où}$$

$g, h \in k[X_0,\dots,X_n]$ homogènes du même degré.

Fait. c'est bien définie sur $V \setminus \mathbb{V}(h) \subseteq \mathbb{P}^n$

Hilroy

preuve. Si $\deg(h) = \deg(g) = d$ et $P = [x_0 : \cdots : x_n]$

avec $h(x_0, \dots, x_n) \neq 0$, alors

$$P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \frac{g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)}{h(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^d} g(x_0, \dots, x_n)}{\cancel{\lambda^d} h(x_0, \dots, x_n)}$$

$$= f(x_0, \dots, x_n) \quad \text{"} \smile \quad \square$$

Fait 2 $\frac{g}{h}$ et $\frac{g'}{h'}$ donnent la même fonction ~~régulière~~ rationelle sur V.

$\iff \forall p \in V, \; g(p)h'(p) - g'(p)h(p) = 0$

(*) $\iff gh' - g'h \in I(V)$

Définition. Le corps de fonctions rationnelles sur $V \subseteq \mathbb{P}^n$ est

$$k(V) = \left\{ \frac{g}{h} \;\middle|\; \begin{array}{l} g, h \in k[X_0, \dots, X_n] \text{ homogènes} \\ \text{du même degré}, \; h \notin I(V) \end{array} \right\} \Big/ \underset{(*)}{\sim}$$

Rmq ils ne sont pas vraiment des fonctions (seulement partielement définies)

Définition. Une fonction (rationnelle) $f \in k(V)$ est régulière à $P \in V$ si $\exists$ une expression $f = \frac{g}{h}$ où $h(P) \neq 0$.

- f est régulière sur $U \subseteq V$ (ouvert) si f est régulière à P, $\forall P \in U$.

Hilroy $\rightsquigarrow$ On obtient un faisceau d'algèbres sur $V \subseteq \mathbb{P}^n$ où ...

$$\mathcal{O}_V(U) = \{ f \in k(V) \mid f \text{ régulière sur } U \}$$

avec fibres

$$\mathcal{O}_{V,P} = \{ f \in k(V) \mid f \text{ régulière à } P \}$$

$\rightsquigarrow (V, \mathcal{O}_V)$ et $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$

deviennent des espaces annelés.

Remarque $\mathcal{O}_V(U) = \{ f \in k(V) \mid f = \frac{g}{h}, \ h(P) \neq 0 \ \forall P \in U \}$

Lemme $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ n'est pas affine

Demo. Posons $A := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$.

Il suffit de démontrer que $\overset{(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})}{\cancel{\mathbb{P}^n}}$ et $\operatorname{Spm} A$ ne sont pas isomorphes. $\operatorname{Spm} A = (\operatorname{spm} A, \mathcal{O}_A)$

$$A = \left\{ f = \frac{g}{h} \;\middle|\; \begin{array}{l} g, h \text{ homogènes du même deg} \\ \text{et } h(P) \neq 0 \quad \forall P \in \mathbb{P}^n \end{array} \right\}$$

$\overset{(ex)}{\Longrightarrow}$ h est constant, de deg 0.

$\Rightarrow g$ est de $\deg(g) = \deg(h) = 0$, donc constant

$\Rightarrow f$ est constante

$\Rightarrow A \cong k$

Donc $\operatorname{spm} A = \{(0)\}$ est un point! mais $\mathbb{P}^n$ contient plusieurs points

À démontrer. $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ est une prévariété algébrique.

$\exists$ recouvrement par des ouverts affines

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

$\mathbb{P}^n = \{ [x_0 : \dots : x_n] \mid x_0, \dots, x_n$ ne sont pas tous $0 \}$

$\cup\!|$

$U_i := \{ [x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0 \}$

si $x_i \neq 0$, posons $\lambda = \frac{1}{x_i}$

$[x_0 : \dots : x_n] = \left[\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_i}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right]$ — i commence à 0.

$= \{ [x_0 : \dots : 1 : \dots : x_n] \mid 1$ dans la i-éme posisition $\}$

Observation. 1) $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$

2) On a une bijection

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

$$[x_0 : \dots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, x_n \right)$$

avec $x_i \neq 0$

$$\overset{\text{NOT}}{=} \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

avec inverse $\psi_i = \varphi_i^{-1} : \mathbb{A}^n \to U_i$

Hilroy

$$\psi : (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) \longmapsto [y_0 : \dots : 1 : \dots : y_n]$$

<u>Proposition.</u> φ_i est un homéomorphisme

<u>Démo.</u> on veut montrer que φ_i et ψ_i sont continues.

Soit $D(h) \subseteq \mathbb{A}^n$. On prétend que

$$\varphi_i^{-1}(D(h)) \subseteq \mathcal{U}_i \text{ est ouvert.}$$

$$h \in k[Y_0, \dots : \hat{Y}_i : \dots : Y_n] \text{ de deg } d$$

$\exists$ polynôme $\tilde{h}$ homogène de degré d dans $k[X_0, \dots : X_i : \dots : X_n]$ t.q.

$$\tilde{h}(\underset{\substack{\| \\ Y_i}}{Y_0, \dots, 1, \dots, Y_n}) = h(Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_n)$$

$$\left(\tilde{h}\Big|_{X_i = 1} = h \right)$$

on prend $\tilde{h} = X_i^d \, h\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right)$

<u>Exemple</u> $h(Y_0, Y_2, Y_3) = 1 + 2Y_0 + 3Y_0Y_2 - Y_3^2$

$$\tilde{h}(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 2X_0X_1 + 3X_0X_2 - X_3^2$$

$$D(\tilde{h}) \cap \mathcal{U}_1 = ? \qquad = X_1^2 + h\left(\frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1}, \frac{X_3}{X_1}\right)$$

$$[x_0 : \dots : x_3] = \left[\frac{x_0}{x_1} : 1 : \frac{x_2}{x_1} : \frac{x_3}{x_1}\right] \in D(\tilde{h})$$

Hilroy

(retour à la preuve)

Pour ce $\tilde{h}$, on a $\varphi_i^{-1}(D(h)) = \underbrace{D(\tilde{h}) \cap U_i}$ ouvert !

$$D(h) = \{(y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) \mid h(y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) \neq 0\}$$

(exemple suite)

$$\Leftrightarrow (1)^2 h\left(\frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1}, \frac{X_3}{X_1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]) \in D(h)$$

(retour preuve)

Donc φ_i est continue.

De même, $\psi_i^{-1}(D(\tilde{h}) \cap U_i) = D(h)$ est ouvert.

$\Rightarrow \psi_i$ est continue $\square$

<u>Théorème.</u> On a un isomorphisme d'espaces annelés

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}) \xrightarrow[(\varphi_i,\ \tilde{\varphi}_i)]{} (\mathbb{A}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$$

$\checkmark$?

<u>Démo.</u> Il nous reste à définir $\tilde{\varphi}_i$ et démontrer que c'est iso. de faisceaux.

$$\varphi_i : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n} \longrightarrow \varphi_{i*}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i})$$

On va le faire sur $D(h) \subseteq \mathbb{A}^n$.

Hilroy

<u>veut</u> $\tilde{\varphi}_{i, D(h)} : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(D(h)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\underbrace{\varphi_i^{-1}(D(h))}_{D(h) \cap U_i})$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(D(h)) = k[Y_0, \dots, \hat{Y_i}, \dots, Y_n]_h$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D(\tilde{h}) \cap U_i) = \{ f \in k(\mathbb{P}^1) \mid f \text{ est régulière sur } D(\tilde{h}) \cap U_i \}$$

$$= \left\{ \frac{g_1}{g_2} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1 g_2 \text{ sont homogènes du même deg} \\ g_2(x_0, \dots, 1, \dots, x_n) \neq 0 \\ \forall (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in D(h) \end{array} \right.$$

On utilise la construction

$$h \longmapsto \tilde{h} \quad \text{homog.}$$

$$\tilde{h}\big|_{X_i = 1} \longleftarrow \tilde{h}$$

pour définir

$$\tilde{\varphi}_{i, D(h)}.$$

$$\tilde{\varphi}_{i, D(h)}\left(\frac{f}{h^N}\right) = \begin{cases} \dfrac{X_i^d \tilde{f}}{\tilde{h}^N} \\ \text{-------} \\ \dfrac{\tilde{f}}{X_i^d \tilde{h}^N} \end{cases}$$

(on multiplie en haut / bas par X_i^d pour avoir le même degré.)

$\tilde{\varphi}_{i, D(h)}$ est un iso. compatible avec les restrictions

$$D(h_1) \subseteq D(h_2)$$

$\Rightarrow$ On obtient un isomorphisme de faisceaux comme desiré $\square$

<u>Corollaire.</u> $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ est une prévariété <u>non</u> affine

2025-11-28 [Vendredi]

Rappels • Une prévariété algébrique est un espace annelé $(V, \mathcal{O}_V)$ qui admet un recouvrement fini par ouvertes affines.

• Une section $f \in \mathcal{O}_V(U)$ donne une fonction régulière

$$\tilde{f} : U \longrightarrow k$$
$$p \longmapsto [U, f] + m_p \in \frac{\mathcal{O}_{V,p}}{m_p} \cong k$$

• $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ où

$$U_i = \{ [x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0 \}$$

Corollaire (du fait que $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ est une prévariété)

Soit $V \subseteq \mathbb{P}^n$ fermé, et soit $\mathcal{O}_V$ le faisceau de $\underbrace{\text{fonctions régulières}}_{\text{"}\frac{g}{h}\text{"} \quad g, h \text{ homo. du même degre}}$ sur V

Alors $(V, \mathcal{O}_V)$ est une prévariété algebrique.

Démonstration. V fermé $\Rightarrow$ $V \cap U_i \subseteq U_i$ $\forall i$
fermé

$$\Rightarrow V \cap U_i \cong \mathbb{V}(I)$$
$$\begin{array}{ccc} \cap\!| & & \cap\!| \\ U_i & \cong & \mathbb{A}^n \end{array}$$

et (par Ex 6 devoir 11)

$\mathcal{O}_V|_{V \cap U_i}$ correspond aux ~~faisce~~ fonctions régulières de $\mathbb{V}(I)$

Hilroy

donc $\left(V \cap U_i, \mathcal{O}_V|_{V\cap U_i}\right) \cong \left(V(I), \mathcal{O}_{V(I)}\right)$

ouverte affine !

donc $V = \bigcup_{i=0}^{n} (V \cap U_i)$ est une prévariété $\square$

<u>Remarque</u> Soit $[x_0 : \cdots : x_n] \in U_i \cap U_j \quad (i \neq j)$

$$\begin{tikzcd}
& {[x_0 : \cdots : x_n]} \arrow[dl, mapsto, "U_i \cong \mathbb{A}^n"'] \arrow[dr, mapsto, "U_j \cong \mathbb{A}^n"] & \\
\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] & & \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{\widehat{x_j}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right)
\end{tikzcd}$$

avec $\frac{x_j}{x_i} \neq 0$ $\qquad$ avec $\frac{x_i}{x_j} \neq 0$

$\rightsquigarrow$ on colle les deux copies de $\mathbb{A}^n$ ensemble sur l'intersection par la règle

$$(y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) \longmapsto \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{\hat{y}_j}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right)$$

dans la place i

$\neq 0$

<u>Exemple.</u> $f(X_0, X_1, X_2) = X_0^3 + aX_0X_2^2 + bX_2^3 - X_1^2X_2$

$$C = V(f) = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \;\middle|\; x_1^2 x_2 = x_0^3 + a x_0 x_2 + b x_2^3 \right\}$$

<u>Remarque</u>: si $x_0 \neq 0$, un parmi x_1 et x_2 est $\neq 0$ aussi.

Hilroy

Donc $\quad C = \bigcup_{i=0}^{2} (C \cap U_i) = \bigcup_{i=1}^{2} (C \cap U_i)$

remarque

- $C_1 = C \cap U_1 = \{ (x_0, x_2) \mid x_2 = x_0^3 + a x_0 x_2^2 + b x_2^3 \}$

  "$x_1 = 1$"

- $C_2 = C \cap U_2 = \{ (x_0, x_2) \mid x_0^3 + a x_0 + b = x_1^2 \}$

  "$x_2 = 1$"

collés par l'isomorphisme

$$C_1 \setminus \{ x_2 = 0 \} \longrightarrow C_2 \setminus \{ x_1 = 0 \}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right)$$

$$\left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) \longleftarrow\!\shortmid (x_0, x_1)$$

//

Définition. Un morphisme de prévariétés est un morphisme d'espaces localement annelés :

$$(\varphi, \tilde{\varphi}) : (V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_W)$$

Fait. Dans l'interprétation des sections f de $\mathcal{O}_V$ ou $\mathcal{O}_W$ comme fonctions $\tilde{f}$, on a que

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_W \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_V \quad \text{agit comme}$$

$$(\tilde{f} : \underset{\underset{W}{\cap}}{U} \rightarrow k) \longmapsto (\tilde{f} \circ \varphi : \underset{\underset{V}{\cap}}{\varphi^{-1} U} \rightarrow k)$$

• En particulier, si V, W sont affines, alors φ est une application ~~affine~~ régulière.

Définition. Une prévariété algébrique $(V, \mathcal{O}_V)$ est séparée si la condition suivante est satisfaite:

• pour chaque variété affine $(Z, \mathcal{O}_Z)$ et chaque paire de morphismes

$$(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1), (\varphi_2, \tilde{\varphi}_2) : (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_V)$$

l'ensemble $E = \{ z \in Z \mid \varphi_1(z) = \varphi_2(z) \} \subseteq Z$

"equalizer" est fermé.

Définition. Une variété algébrique est une prévariété qui est séparée.
$(V, \mathcal{O}_V)$

Remarque. Dans certaines sources, on met aussi la condition que V soit irréductible.

Pour nous, il n'y a pas probleme: on prend les composantes.

Exemple/lemme: Les variétés affines sont separées (et donc elles sont des variétés ☺)

Démonstration. Fixons $V \cong \mathbb{V}(I) \subseteq k^n$.
Prenons Z affine et $\varphi_1, \varphi_2 : Z \rightrightarrows V$ régulières.

$(t = 1, 2)$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[drr, bend right, "x_i \circ \varphi_t"'] & V \cong \mathbb{V}(I) \arrow[dr, "x_i"] & \subseteq k^n \arrow[d] \\ & & k \end{tikzcd}$$

$x_i \circ \varphi_t$
$\uparrow$
une fonction régulière $\hookrightarrow \in k[Z] = \mathcal{O}_Z(Z)$

- $\varphi_1 = \varphi_2 \iff x_i \circ \varphi_1 = x_i \circ \varphi_2 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\therefore \; E = \left\{ z \in Z \;\middle|\; \begin{array}{c} (x_i \circ \varphi_1 - x_i \circ \varphi_2)(z) = 0 \\ \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{V}(x_i \circ \varphi_1 - x_i \circ \varphi_2) \quad \text{fermé} \quad ☺ \qquad \square$$

Non-exemple : une prévariété non-séparée !

$$V_1 = \mathbb{A}^1, \qquad V_2 = \mathbb{A}^1$$

$$V^* := V_1 \sqcup V_2 = \left\{ (x, t) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in \mathbb{A}^1 \\ t = 1, 2 \end{array} \right\}$$

$\uparrow$ avec topologie de l'union disjoint.

$$V^* \xrightarrow{\pi} V := V^*/\sim \quad \text{où } (x,1) \sim (x,2) \iff x \neq 0$$

Rmq : $U \subseteq V$ ouvert si $\pi^{-1}(U) \subseteq V^*$ ouvert.

Definissons $U_1 = \{[x,1]\}$

$$\pi_*^{-1}(U_1) = \underbrace{\underset{\text{ouvert}}{V_1} \sqcup \underset{\text{ouvert}}{(V_2 \setminus \{0\})}}_{\text{ouvert dans } V^*}$$

$\Longrightarrow U_1 \subseteq V$ est ouvert

$U_2 = \{[x,2]\}$ ouvert. On a $\underset{(t=1,2)}{U_t} \xrightarrow{\sim} k^1$

$$[(x,t)] \longrightarrow x$$

et $U_1 \cap U_2 = \{[x,1] \mid x \neq 0\}$

Définissons $\mathcal{O}_V$ par

$$U \longmapsto \mathcal{O}_V(U) = \{f : U \longrightarrow k \mid f|_{U \cap U_t} : U \cap U_t \longrightarrow k\}$$

$\mathbb{A}^1 \supseteq$ est régulière pour $t=1, t=2$.

$\rightsquigarrow$ c'est un faisceau

et $(V, \mathcal{O}_V)$ est une prévariété.

<u>MAIS</u> ce n'est pas séparée.

On définit $\varphi_t : \mathbb{A}^1 \longrightarrow V$

$$x \longmapsto [x,t] \quad (t=1,2)$$

on obtient

$$E = \{x \in \mathbb{A}^1 \mid [x,1] = [x,2]\} = \mathbb{A} \setminus \{0\}$$

ouvert! #

Hilroy

On n'aime pas les espaces non-séparées parce que les limites ne sont pas bien définies.

Critère: Soit $(V, \mathcal{O}_V)$ une prévariété.
Dans le "produit" $V \times V$, on a le diagonale

$$\Delta = \{ (v,v) \mid v \in V \} \subseteq V \times V$$

- $\Delta \subseteq V$ est fermé $\iff$ V est séparée

(on verra le cours prochain)

Exemple: Un sous-ensemble ouvert U d'une variété algébrique V est une variété algébrique

- c'est annelé $(U, \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_V|_U)$
(exercice 4, dev 11)
U admet un recouvrement par ouvertes affines
$\Longrightarrow$ U est une prévariété

Esta clase puede venir en el examen

- à démontrer: c'est séparée

Soit Z affine, soient $\varphi_1, \varphi_2 : Z \longrightarrow U$ régulières

v.m.q. $E = \{ z \in Z \mid \varphi_1(z) = \varphi_2(z) \in U \subseteq V \}$ est fermé

$= \{ z \in Z \mid i \circ \varphi_1(z) = i \circ \varphi_2(z) \}$ si l'inclusion

pour $i \circ \varphi_t : Z \longrightarrow V$

fermé car V est séparée. $\square$

2025-12-02

Rappel: une prévariété $(V, \mathcal{O}_V)$ est separée si

$\forall$ variété affine $(Z, \mathcal{O}_Z)$

et

$\forall \varphi_1, \varphi_2 : Z \longrightarrow V$ régulière

on a que

$$E = \{ z \in Z \mid \varphi_1(z) = \varphi_2(z) \}$$

est fermé dans Z.

- On veut montrer :

$$(V, \mathcal{O}_V) \text{ est séparée}$$
$$\iff \Delta \subseteq \underbrace{V \times_k V}_{\text{produit de prévariétés.}} \text{ est fermé}$$

Idée: comme ensemble, le produit de $(V, \mathcal{O}_V)$ et $(W, \mathcal{O}_W)$ est juste $V \times W$

mais la topologie n'est pas celle du produit, et on a besoin de définir un faisceau.

Motivation: le produit $V \times_k V$ doit satisfaire une propriété universelle :

- on a $\mathrm{proj}_V : V \times_k W \longrightarrow V$

$\mathrm{proj}_W : V \times_k W \longrightarrow W$ régulières

t.q. $\forall$ prévariété $(E, \mathcal{O}_E)$ et app. régulières

$\varphi_V : E \longrightarrow V$

$\varphi_W : E \longrightarrow W$

Hilroy

$\exists!$ application régulière

$$\Phi : E \longrightarrow V \times_k W$$

t.q.

$$\varphi_V = \mathrm{proj}_V \circ \Phi$$

$$\varphi_W = \mathrm{proj}_W \circ \Phi$$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, dashed, "\Phi"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_V"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_W"] & \\
 & V \times_k W \arrow[dl, "\mathrm{proj}_V"'] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_W"] & \\
V \arrow[dr] & & W \arrow[dl] \\
 & \mathrm{Spm}\, k \overset{\shortparallel}{\underset{*}{}} &
\end{tikzcd}$$

<u>Exemples / esquisse</u>

(1) $\mathbb{A}^n \times_k \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m} \quad \left(\neq \mathbb{A}^n \overset{\text{top. du produit}}{\times} \mathbb{A}^m\right)$

$$\left(k[X_1, \ldots, X_n] \otimes_k k[X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}] = k[X_1, \ldots, X_{n+m}] \right)$$

(2) (Dev 10, #4) Si $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ et $\mathbb{V}(J) \subseteq \mathbb{A}^m$,

alors

$$\mathbb{V}(I) \underset{k}{\times} \mathbb{V}(J) := \mathbb{V}(\underset{\substack{\text{polynomes dans}\\ X_1, \ldots, X_n}}{I}, \underset{\substack{\text{polynômes dans}\\ X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}}}{J}) \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$$

$$I, J \subseteq k[X_1, \ldots, X_{n+m}]$$

$\left(\underline{\text{Rmq.}} \quad k[V(I)] \otimes_k k[V(J)] \cong k[V(I,J)] \right)$

(3) Si $V = \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ et $W = \bigcup_{j=1}^{M} W_j$

avec V_i, V_j ouvertes affines,

$$V \times_k W = \bigcup_{i,j} (V_i \times_k W_j)$$

et les parties affines sont collées ensembles

$$(V_i \times_k W_j) \cap (V_{i'} \times_k W_{j'})$$

$$= (V_i \cap V_{i'}) \times_k (W_j \cap W_{j'})$$

__Faisceau sur $V \times_k W$__

- fonctions régulières
- Soit $U \subseteq V \times_k W$ ouvert et $f : U \to k$ une fonction

f est régulière à $P \in U \Leftrightarrow \exists i,j$ et $\tilde{U} \subseteq \underbrace{V_i \times_k W_j}_{\text{affine}}$, $P \in$

t.q. $f|_{\tilde{U}}$ est régulière.

f est régulière sur U si elle est régulière $\forall P \in U$.

$$\rightsquigarrow \mathcal{O}_{V \times_k W}(U) = \{ f : U \to k \mid f \text{ régulière} \}$$

$\square$

Lemme 1 Une prévariété $(V, \mathcal{O}_V)$ est séparée

$\Leftrightarrow$ le diagonale $\Delta = \{(v,v) \mid v \in V\} \subseteq V \times_k V$ est fermé

Demo "$\Leftarrow$" Soient $\varphi_1, \varphi_2 : \overset{\text{affine}}{Z} \longrightarrow V$ régulière

On obtient $\varphi_1 \times \varphi_2 : Z \longrightarrow V \times_k V$ régulière.

$$z \longmapsto (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$$

$$E = \{z \in Z \mid \varphi_1(z) = \varphi_2(z)\} = (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}(\underset{\text{fermé}}{\Delta})$$

$\therefore$ E est fermé.

"$\Rightarrow$" Considérons $Z = V \times_k V$,

$$\varphi_i : Z \longrightarrow V \quad (i = 1,2)$$
$$(v_1, v_2) \longmapsto v_i$$

Écrivons $V \times_k V = \bigcup_{j=1}^{N} U_j$ avec U_j ouverte affine.

On a $\varphi_i\big|_{U_j} : U_j \longrightarrow V$

et

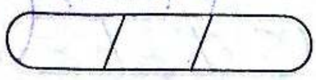
$$E_j = \{z \in U_j \mid \varphi_1(z) = \varphi_2(z)\}$$

est fermé dans U_j.

Mais $E_j = \{(v_1, v_2) \in U_j \mid v_1 = v_2\} = \Delta \cap U_j \subseteq U_j$ fermé

$\Rightarrow \Delta$ est fermé dans $\bigcup_{j=1}^{N} U_j = V \times_k V$ $\square$

Lemme 2. $\Delta \subseteq \mathbb{P}^n \times_k \mathbb{P}^n$ est fermé et donc $\mathbb{P}^n$ est separé



et donc $\mathbb{P}^n$ est une variété

Démonstration. $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i \Rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n = \bigcup_{i,j=0}^{n} U_i \times_k U_j$

On v.m.q. $\Delta \cap (U_i \times_k U_j) \subseteq U_i \times_k U_j$ est fermé $\forall i, j$.

Quand $i=j$ $\quad U_i \times_k U_i \cong \mathbb{A}^n \times_k \mathbb{A}^n$

$$\Delta \cap (U_i \times U_i) \cong \{(x,x) \mid x \in \mathbb{A}^n\} = \Delta_{\mathbb{A}^n}$$

c'est fermé aussi

Quand $i \neq j$ $\quad \Delta \cap (U_i \times_k U_j) = \left\{(P,P) \;\middle|\; \begin{array}{l} P \in U_i \text{ et} \\ P \in U_j \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow P = [x_0 : \cdots : x_n] \text{ avec } x_i, x_j \neq 0.$$

On utilise ces coordonnées :

$$U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$$

$$[x_0 : \cdots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

enlevé

On obtient

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_k U_j & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{A}^n \times_k \mathbb{A}^n \cong \mathbb{A}^{2n} \\ \cup\!\!\mid & & \cup\!\!\mid \\ \Delta \cap (U_i \times_k U_j) & \xrightarrow{\sim} & X \end{array}$$

$$P \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

$$P \longmapsto \left(\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{\widehat{x_j}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right) \right)$$

Exercice: $X = \left\{ \left((a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n), (b_0, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_n) \right) \right.$

$$a_t b_s = a_s b_t \quad \forall t, s \in \{0, \dots, n\}$$

conditions polynomiales!

avec la convention que $a_i = b_j = 1$.

Donc $X \subseteq \mathbb{A}^{2n}$ est algébrique $\Leftrightarrow$ fermé $\square$

$$V(X_s Y_t - X_t Y_s) = X$$

Définition / exemples

- Les sous-variétés fermées de $\mathbb{P}^n$ sont les variétés projectives (les variétés projectives jouent le rôle de variété différentiable compacte)

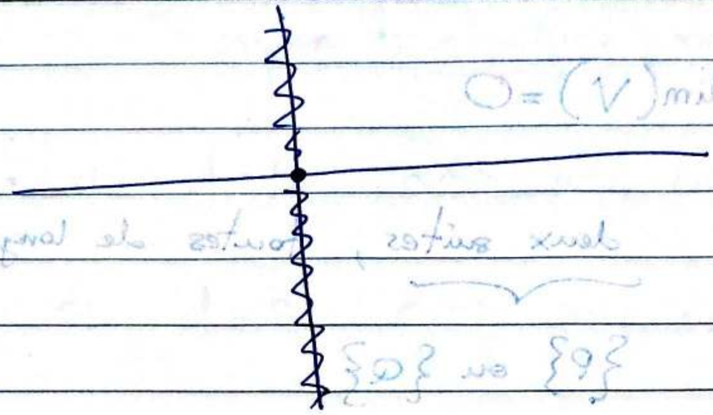
- Les sous variétés localement fermés de $\mathbb{P}^n$ sont les variétés quasi-projectives.

Rmq $Y \subseteq X$ est localement ferme

$\Leftrightarrow Y \subseteq \overline{Y}$ est ouvert

$\Leftrightarrow \exists\, U \subseteq X$ ouvert t.q. $Y \subseteq U$ est fermé

Non-exemple $\quad Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$



Exemple

$$\underset{\text{fermé}}{V(I)} \subseteq \mathbb{A}^n \underset{\text{ouvert}}{\subseteq} \mathbb{P}^n$$

⇝ donc $V(I)$ est quasi-projective

LA DIMENSION

Soit V un espace topologique noethérien, avec la propriété que

$$\{p\} \text{ est fermé } \forall p \in V$$

Définition. La dimension de V est le supremum des longueurs d des suites

$$V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_d$$

d'ensembles fermés et irréductibles.

Exemple
• $V = \{P\}$
La seule suite est $V_0 = \{P\}$

$\Rightarrow \dim(V) = 0$

• $V = \{P\} \sqcup \{Q\}$ $\underbrace{\text{deux suites}}_{\{P\} \text{ ou } \{Q\}}$, toutes de longueur 0.

Ex : $\mathbb{A}^1$:

$$V_0 = \mathbb{A}^1 \supsetneq V_1, \quad V_1 = \{P\}$$

chaîne de longueur 1.

fermé irréductible

$\therefore \dim(\mathbb{A}^1) = 1$ ☺

Remarque (1) Soit $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ composantes irréductibles

Alors
$$\dim(V) = \max\{\dim(V_i) \mid i\}$$

Si $\dim(V_i) = d \quad \forall i = 1, \ldots, m$,
alors on dit que
V est de dimension pûre.

(2) Si V est irréductible et $W \subsetneq V$ est fermé, alors chaque suite
$$W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_d \quad \text{dans } W$$
s'étend à une suite dans V.
Donc $\dim V \geq \dim W + 1$.

Définition. La dimension d'une variété algébrique $(V, \mathcal{O}_V)$ est sa dimension comme espace topologique noethérien.

- si $d = 1$ $\rightsquigarrow$ une courbe algebrique
- si $d = 2$ $\rightsquigarrow$ une surface algebrique

//

Soit A un anneau noethérien et $\mathfrak{p} \leq A$ premier.

Déf. L'hauteur de $\mathfrak{p}$ est la longueur maximale d'une chaîne d'idéaux premiers. distincts

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_d \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_0$$

Exemple $\mathfrak{p} = \langle p \rangle$ principal et premier

$$\Rightarrow ht(\mathfrak{p}) = 1$$

Déf. La dimension de Krull de A est

$$\dim(A) = \sup\{ ht(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \leq A \text{ premier} \}$$

2025-12-05. [Vendredi]

Rappelons Pour $(V, \mathcal{O}_V)$ un ensemble algebrique,

$\dim(V)$ = longueur maximale d'une suite d'ensembles fermés et irréductibles

= longueur maximale d'une suite d'ideaux premiers dans $k[V]$

Si V est affine

$= \dim(k[V])$

dimension de Krull

Deux autres perspectives sur la dimension

(1) degré de trascendance de $k(V)$

(2) dimension de l'espace tangent

---

§1 DEGRÉ DE TRANSCENDANCE

Def. • Soient $k \subseteq \Omega$ deux corps.
Pour $A \subseteq \Omega$ un sous ensemble, on note par $k(A)$ le sous-corps minimal de Ω qui contient k et A.

Def • Une base de transcendance pour Ω sur k est un ensemble ~~Bsk~~ $B \subseteq \Omega$ t.q.

(1) B est algebriquement indépendant

(2) Ω est algebrique sur $k(B)$

Hilroy

201

~~Def.~~ • toutes les bases de trascendance pour Ω sur k ont le même nombre d'éléments,

le degré de transcendance de Ω sur k, $\mathrm{tr}\deg_k(\Omega)$

?

Exemple • Si Ω est algébrique sur k, alors

$$B = \emptyset$$

et

$$\mathrm{tr.deg}_k(\Omega) = 0$$

$$\text{e.g. } \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 0$$

• $k \subseteq \Omega = k(X_1, \dots, X_n)$

$$B = \{X_1, \dots, X_n\}$$

donc $\mathrm{tr\text{-}deg}_k(\Omega) = n.$

• $$\left.\begin{matrix} \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}(X_1, \dots, X_n) \\ \cup\!\!\!\mid \xleftarrow{\text{algébrique}} \\ \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}(X_1, \dots, X_n) \end{matrix}\right\} \mathrm{tr.deg} = n.$$

Théorème. Soit A un anneau intègre avec corps de fractions $F(A)$. Soit $k \subseteq A$ un sous-corps t.q.

A est une algèbre finiment engendrée.

Alors $\mathrm{tr.deg}_k(F(A)) = \dim A$

↳ cela ~~implique~~ s'applique à $A = k[V]$ pour V affine et irréductible. Donc $F(A) = k(V)$

On obtient

$$\dim V = \dim k[V] = \text{tr-deg}_k\big(k(V)\big) = ??$$

Exemple. $V = \mathbb{A}^n$, $k(V) = k(X_1, \dots, X_n)$

$$\Longrightarrow \dim \mathbb{A}^n = n$$

Exemple Soit $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ irréductible (non-constant)

Soit $H = V(f) \subset \mathbb{A}^n$, irréductible

Écrivons $k[x_1, \dots, x_n] = k[X, \dots, X_n]/\langle f \rangle = k[H]$

où $x_i = X_i + \langle f \rangle$.

- f non constant $\Longrightarrow$ il dépend sur au moins un X_i, disons X_n

$\Longrightarrow$ X_n apparaît dans chaque multiple non-nul de f.

$\Longrightarrow$ $\langle f \rangle \cap k[X_1, \dots, X_{n-1}] = \{0\}$ et donc $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ sont algebriquement idépendants dans $k(H)$

Mais x_n est algébrique sur $k(x_1, \dots, x_{n-1})$ car

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, Y) := g(Y)$$

$$\in k(x_1, \dots, x_{n-1})[Y] \text{ et } g(x_n) = f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

alors $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ est une base de trascendence de $k(H)$ sur k.

$$\Rightarrow \dim H = \left| \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \right| = n-1$$

Rmq si $n=2$, $H \subset \mathbb{A}^2$ est une courbe

si $n=3$, $H \subset \mathbb{A}^3$ est une surface

pour $n \geq 4$, on appelle H une hypersurface.

Théorème de normalization de Noether.

Soit A une k-algèbre affine.
Alors $\exists\, d \geq 0$ t.q. A est entier sur un sous-anneau isomorphe à

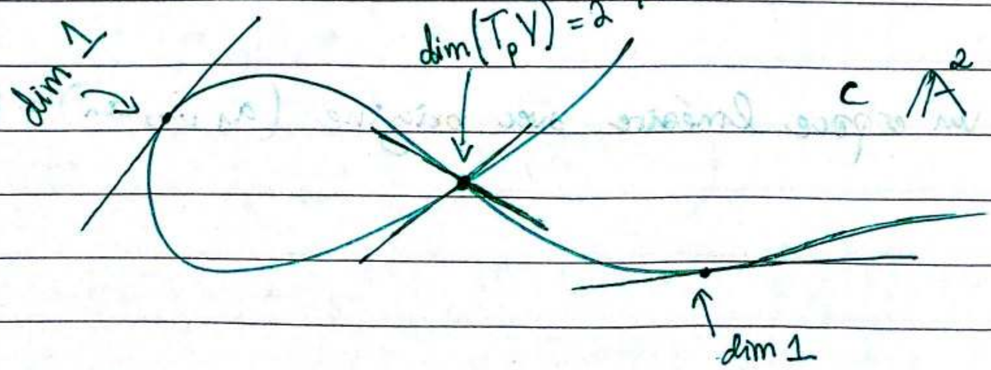
$$k[X_1, \dots, X_d]$$

Donc...

$\rightsquigarrow$ $F(A)$ est algébrique sur $k(X_1, \dots, X_d)$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{tr.deg}_k(F(A)) = d$.

§2. L'ESPACE TANGENT



L'idée (du calcul)

sous esp. vectoriel qui ne contient pas ne. le zero

L'espace tangent T_pV est un espace linéaire di dimension $\dim V$ (sauf peut-être aux points "singuliers")

Rappels Considérons k^n comme espace vectoriel

$$X_i : k^n \longrightarrow k \qquad \text{i-ème fonction coordonée}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

↳ donnent une base de l'espace dual

$$(k^n)^\vee = \mathrm{Hom}_K(k^n, k) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i X_i \right\} \subseteq k[\mathbb{A}^n]$$

Soit $V = \mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ algébrique et $P = (a_1, \dots, a_n) \in V$.

I radiciel

Déf. L'espace tangent de V au point P est l'ensemble algébrique T_pV définit par les équations linéaires

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) \cdot (X_i - a_i) = 0 \quad \forall f \in I$$

↳ un espace linéaire avec origine $(a_1, \dots, a_n) = P$.

Hilroy

Lemme. Il suffit de considérer $(*)$ pour f dans un ensemble générateur de I.

Preuve : règle du produit.

Exemples $X^m + Y^m = 1 \iff f = X^m + Y^m - 1$

$$\left(\dim(\mathbb{V}(f)) = 2 - 1 = 1\right)$$

Soit $P = (a,b) \in \mathbb{V}(f)$

$$T_p(\mathbb{V}(f)) = \mathbb{V}\left(\frac{\partial f}{\partial X}(a,b)(X-a) + \frac{\partial f}{\partial Y}(a,b)(Y-b)\right)$$

$$= \mathbb{V}\left(ma^{m-1}(X-a) + mb^{m-1}(Y-b)\right)$$

Rmq espace linéaire de dim 1 $\nwarrow$ $\dim(\mathbb{V}(f))$

si $(a,b) \neq (0,0)$

mais $(0,0) \notin \mathbb{V}$ (si $\mathrm{char}(k) \neq m$)

Exemple plus généralement : hypersurface $H = \mathbb{V}(f) \subseteq \mathbb{A}^n$.

f réd.

Pour $P = (a_1, \dots, a_n) \in H$

$$T_p H = \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(P)(X_i - a)\right)$$

$$\Rightarrow \dim T_p V = \begin{cases} n-1 & \text{si } \exists i \text{ t.q. } \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) \neq 0 \\ n & \text{si } \forall \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) = 0 \\ & (\text{et } f(P) = 0) \end{cases}$$

Définition. Soit V de dimension pûre d.
On dit que $p \in V$ est non-singulier (ou régulier) si $\dim T_pV = d$ et
on dit que P est singulier si $\dim(T_pV) \neq d$.

Remarque Soit $I = (f_1, \dots, f_r) \subset k[X_1, \dots, X_n]$

La matrice du système linéaire déterminant

$T_pV \subset \mathbb{A}^n$ est Jacobien

$$Jac(f_1, \dots, f_r)_P = \left[\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(P) \right]_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}}$$

$$\Rightarrow \dim(T_pV) = n - rg(Jac(I)_p)$$

- Pour chaque $m \geq 0$,

$$\{ P \in V \mid rg(J(I)_p) \leq m \}$$

est l'ensemble des zéros d'une collection de mineurs.
Alors c'est fermé.

- donc $\{ p \in V \mid rg(Jac(I)_p) \text{ est maximal} \}$
est ouvert dans V.

$\Rightarrow \mathcal{U} := \{ p \in V \mid \dim T_pV \text{ est minimal} \}$ est ouvert dans V

Fait. ($\operatorname{char} k = 0$) la valeur minimal de $rg(Jac(I))_p$ est $n - \dim V$

$\Rightarrow \dim T_pV \geq \dim V \quad \forall p \in V$

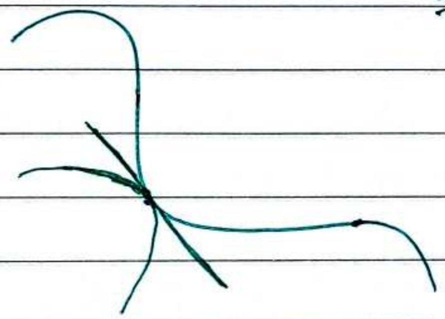
 et

$$\mathcal{U} = \{ P \in V \mid \dim T_P V = \dim V \}$$
$$= \{ \text{points non-singuliers} \}$$

est ouvert.

Remarques. En calcul, l'espace tangent voit les $\underbrace{\text{classes d'équivalences}}$ des "germes" des fonctions at P

une relation d'équivalence plus générale que pour la fibre $\mathcal{O}_{V,P}$



- On peut calculer l'espace tangent à un point $P \in V$ pour $(V, \mathcal{O}_V)$ pas nécessairement affine, à partir de $\mathcal{O}_{V,P}$ $\left(\cong \left(\frac{m_P}{m_P^2} \right)^V \right)$

$$f(X) = \cancel{a} + bX + \cancel{cX^2}$$

why? ok!

Remarque $\dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = n$.