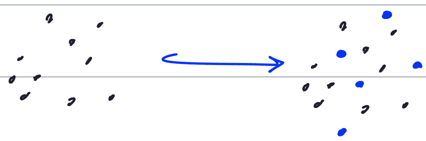
2026-02-17

LA DISTANCE D'ENTRELACEMENT

Données



petits changements dans les données ⇒ petits changements dans les m.p.

TDA outil : modules de persistance (m.p.)

On compare les m.p. avec une distance

BUT Introduire les modules d'intervalle et calculer leur distance d'entrelacement

Conventions

k : corps (fixé)

tout esp. vect a dim finie.

MODULES DE PERSISTANCE

Déf Un module de persistance U est la donnée de

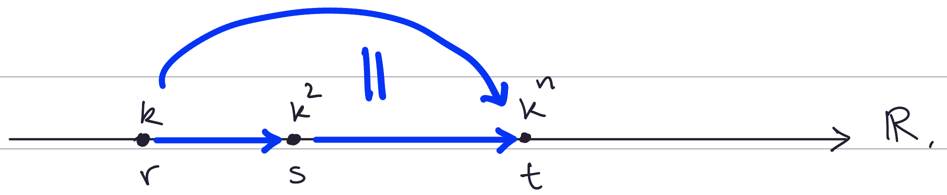
$$(U_t)_{t\in\mathbb{R}} \text{ esp. vect.}$$

$$\left(U_r \xrightarrow{u_s^r} U_s\right)_{r\leq s} \text{ app. linéaires.}$$

$$\text{t.q. } u_s^r \circ u_t^s = u_t^r \quad \forall\, r\leq s\leq t$$

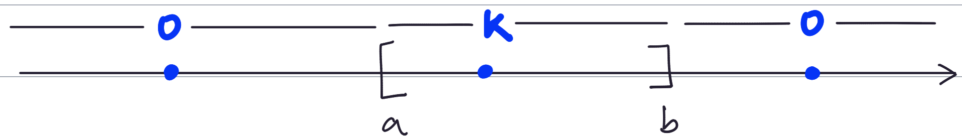
Rmq Un m.p. est un foncteur $(\mathbb{R},\leq) \longrightarrow \mathrm{vect}(k)$

Idée



Exemple [Module d'intervalle] $I = [a,b]$

$k^{[a,b]}$



$$t \longmapsto \begin{cases} k & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$r \leq s$

$$(r \to s) \longmapsto \begin{cases} k \xrightarrow{\mathrm{Id}} k & \text{si } r, s \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème Pour tout module de persistance U il existe des intervalles $I_1, I_2, \dots$ tels que $U = \bigoplus_i k^{I_i}$.

Morphismes Soient U, V m.p.

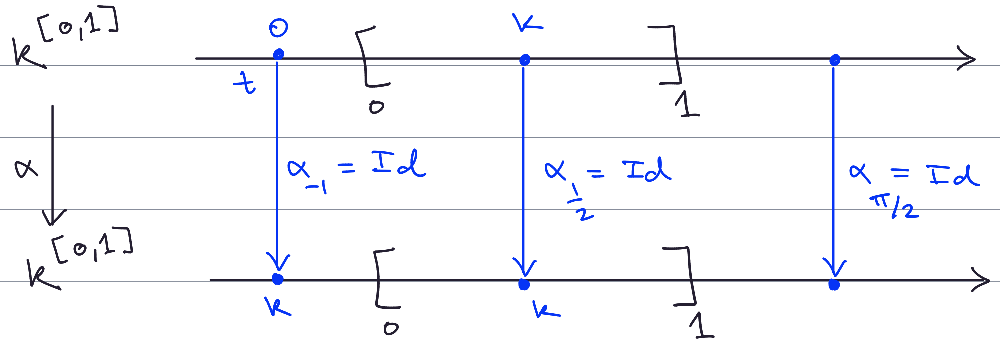
C'est quoi $U \xrightarrow{\alpha} V$?

$r \leq s$. $\qquad r \longrightarrow s$

$\alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$

$$\begin{tikzcd}
U_r \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_r"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U_s \arrow[d, "\alpha_s"] \\
V_r \arrow[r] & V_s
\end{tikzcd}$$

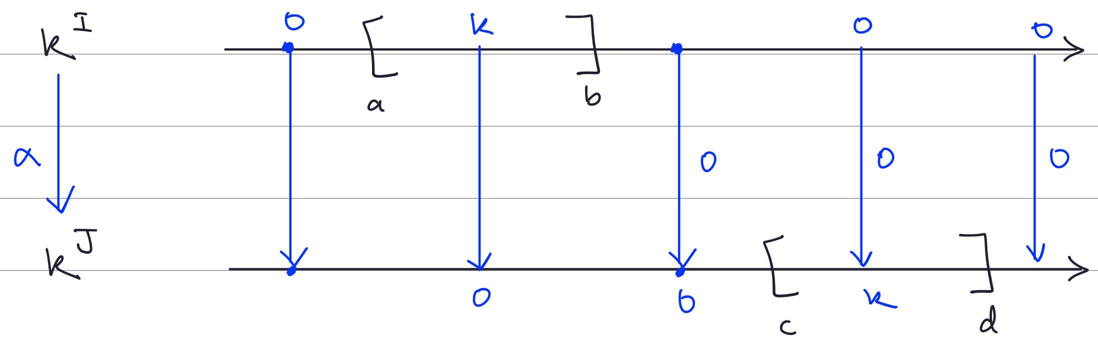
Exemple



En général : $Id_U = (U_t \xrightarrow{Id} U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ pour U un m.p.

Exemple $\quad I = [a,b]$, $J = [c,d]$

On s'intérese au cas des intervalles fermés. Pour d'autres types d'intervalles, l'argument est similaire.

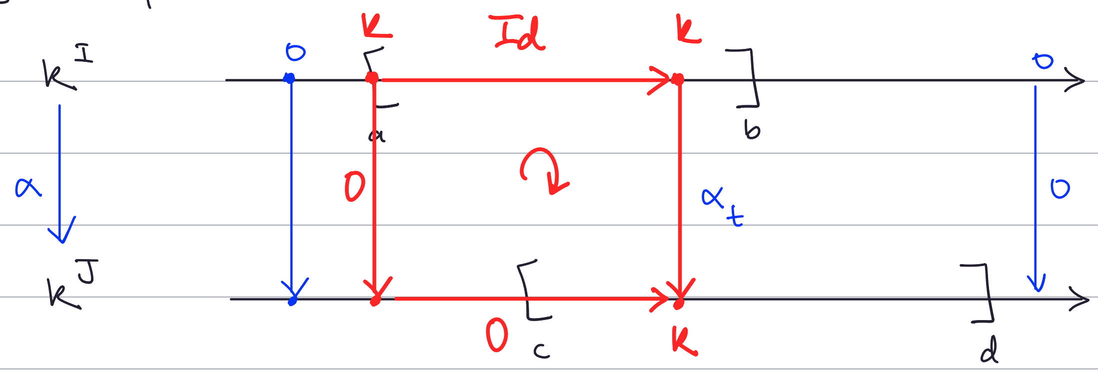


On a $\alpha = 0$.

Donc $I \cap J = \emptyset \implies Hom(k^I, k^J) = 0$

Question $\quad$ Quelles sont les conditions sur a,b,c,d pour que $Hom(k^I, k^J) \neq 0$?

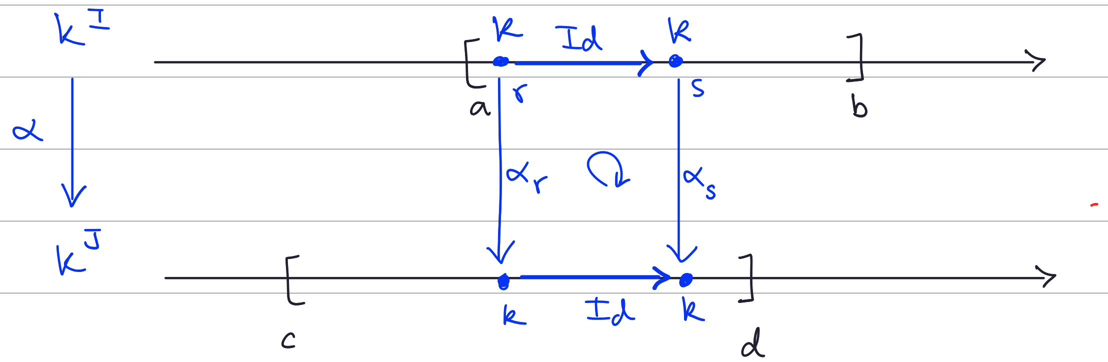
On bouge un peu :



$$\alpha_t \circ \mathrm{Id}_k = 0 \qquad \forall t \in [c,b]$$

Alors $a < c \leq b \Rightarrow \mathrm{Hom}(k^I, k^J) = 0$

On bouge encore un peu plus.



Alors $\alpha_s \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ \alpha_r$

Donc $\alpha_s = \alpha_r \quad \forall r, s \in I \cap J$.

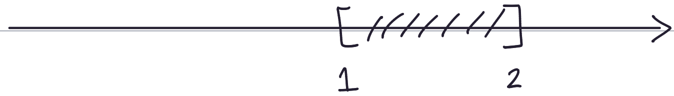
Une app. lin $k \longrightarrow k$ est multiplication par un scalaire.

<u>Lemme</u> $c \leq a \leq d \leq b \Leftrightarrow \mathrm{Hom}(k^{[a,b]}, k^{[c,d]}) \simeq k$.

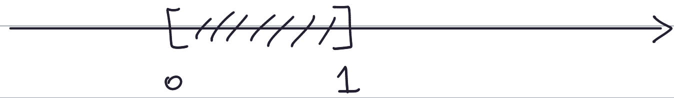
Pas de démo.

DÉCALAGE (shift)

$k^{[1,2]}$



$k^{[0,1]}$



$$k^{[0,1]}(t) = \begin{cases} k & \text{si } \quad \underline{0 \leq t \leq 1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 1 \leq t+1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \quad t+1 \in [1,2] \\ &\Leftrightarrow \quad t \in [1,2]-1 \end{aligned}$$

$$= k^{[1,2]-1}(t)$$

En général...

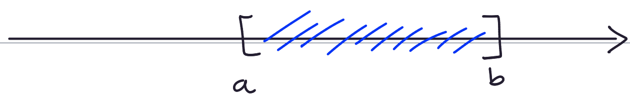
U : m.p. $\quad \varepsilon \geqslant 0.$

$$U[\varepsilon] : \quad t \longmapsto U_{t+\varepsilon}$$

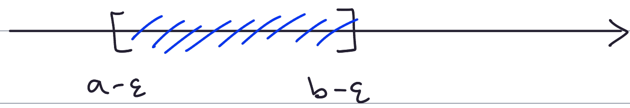
$$r \to s \longmapsto U_{r+\varepsilon} \xrightarrow{U_{s+\varepsilon}^{r+\varepsilon}} U_{s+\varepsilon}$$

Exemple

$U = k^{[a,b]}$



$U[\varepsilon] = k^{[a,b]-\varepsilon}$



Rmq Il existe un morphisme $U \longrightarrow U[\varepsilon]$ defini par

$$Id_U^{\varepsilon} = \left(U_t \xrightarrow{u^t_{t+\varepsilon}} U_{t+\varepsilon} \right)_{t \in \mathbb{R}}$$

Obs $\varepsilon = 0 \Rightarrow Id_U^{\varepsilon} = Id_U$

"une identité généralisé"

Décalage d'un morphisme

morphisme: $U \xrightarrow{\alpha} V$

$$\alpha = \left(U_t \xrightarrow{\alpha_t} V_t \right)_{t \in \mathbb{R}}$$

décalage: $$\alpha[\varepsilon] = \left(U_{t+\varepsilon} \xrightarrow{\alpha_{t+\varepsilon}} V_{t+\varepsilon} \right)_{t \in \mathbb{R}}$$

Isomorphisme vs Entrelacement

Connu Pour A, B deux obj. (e.g. groupes/anneaux/esp.top.)

$A \cong B$ $\iff$ $\exists\, \phi : A \longrightarrow B$, $\exists\, \psi : B \longrightarrow A$ t.q.

isomorphisme — les diagrammes commutent:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "Id_A"] \arrow[dr, "\phi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A \\ & B \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "\phi"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ B \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "Id_B"'] & & B \end{tikzcd}$$

i.e. $\psi \circ \phi = Id_A$ et $\phi \circ \psi = Id_B$

Entrelacement

Soient U, V p.m. $\qquad \varepsilon \geq 0$.

Def $U \simeq V$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \phi : U \to V[\varepsilon],\ \psi : V \to U[\varepsilon]$

ε-entrelacés t.q. les diag. s. c :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "Id_U^{2\varepsilon}"] \arrow[dr, "\phi"'] & & U[2\varepsilon] \\ & V[\varepsilon] \arrow[ur, "\psi[\varepsilon]"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & U[\varepsilon] \arrow[dr, "\phi[\varepsilon]"] & \\ V \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "Id_V^{2\varepsilon}"'] & & V[2\varepsilon] \end{tikzcd}$$

Rmq $U \cong V \Leftrightarrow \varepsilon = 0$

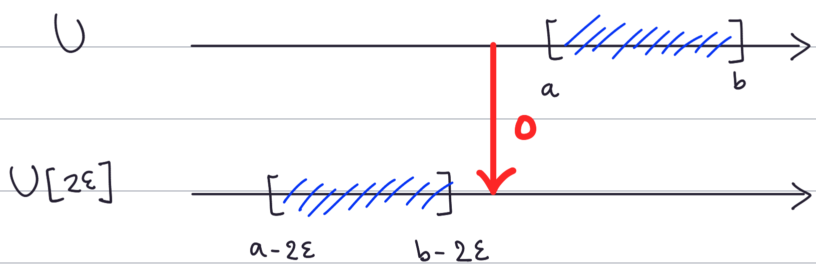
DISTANCE D'ENTRELACEMENT

Soient U, V m.p.

$$d_I(U, V) = \inf \left\{ \varepsilon \geq 0 \;\middle|\; U, V \text{ sont } \varepsilon\text{-entrelacés} \right\}$$

$$\text{BUT} \quad \text{Calculer} \quad d_T\big(\underbrace{k^{[a,b]}}_{\overset{\parallel}{U}},\ \underbrace{k^{[c,d]}}_{\overset{\parallel}{V}}\big).$$

Obs Un entrelacement est toujours possible.
Si $\varepsilon > 0$ est trop grand, le morphisme $U \longrightarrow U[2\varepsilon]$ est 0.



$$\underbrace{[a,b] \cap [a-2\varepsilon, b-2\varepsilon] = \emptyset}_{} \implies \mathrm{Hom}\big(U, U[2\varepsilon]\big) = 0.$$

$$\iff b - 2\varepsilon < a$$

$$\iff \varepsilon > \frac{b-a}{2}$$

Similairement $\quad \varepsilon > \dfrac{d-c}{2} \implies \mathrm{Hom}\big(V, V[2\varepsilon]\big) = 0.$

(*) Alors, si $\varepsilon > \max\left\{ \dfrac{b-a}{2}, \dfrac{d-c}{2} \right\}$,

$$\mathrm{Id}_U^{2\varepsilon} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_V^{2\varepsilon} = 0$$

donc on prend $\phi = 0 = \psi$.

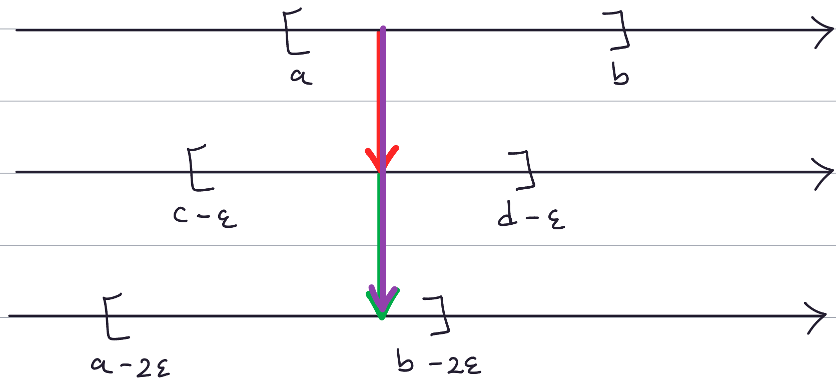
La commutativité est trivial.

Mais on n'a pas pris en compte
la position entre U et V.

Lemme $\quad c \leq a \leq d \leq b \iff \mathrm{Hom}(k^{[a,b]}, k^{[c,d]}) \cong k.$

Entrelacement en position correcte :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "\phi"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{Id}_U^{2\varepsilon}"'] \\
V[\varepsilon] \arrow[d, "\psi[\varepsilon]"] \\
U[2\varepsilon]
\end{tikzcd}$$



$c-\varepsilon \leq a \leq d-\varepsilon \leq b \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Hom}(k^{[a,b]}, k^{[c-\varepsilon, d-\varepsilon]}) \cong k$

$a - 2\varepsilon \leq c - \varepsilon \leq b - 2\varepsilon \leq d - \varepsilon$

$\iff a - \varepsilon \leq c \leq b - \varepsilon \leq d \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Hom}(k^{[c,d]}, k^{[a-\varepsilon, b-\varepsilon]}) \cong k.$

__Obs__ On obtient la même info. avec l'autre triangle.

OK. Alors quelles son les valeurs admisibles de ε ?

$\underline{c-\varepsilon \leq a} \leq \underline{d-\varepsilon \leq b} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \geq |c-a|$

$\underline{a-\varepsilon \leq c} \leq \underline{b-\varepsilon \leq d} \quad \quad \varepsilon \geq |d-b|$

$\Rightarrow \quad \varepsilon \geq \max\{|c-a|, |d-b|\}$

Lemme Si $\varepsilon \geq \max\{|c-a|, |d-b|\}$, alors

$k^{[a,b]}$ et $k^{[c,d]}$ sont ε-entrelacés.

Il suit, par ⊛ et ceci, que

$$d_T(k^I, J) \leq \min\left\{\frac{1}{2}\max\{b-a, d-c\}, \max\{|c-a|, |d-b|\}\right\}.$$

Fait L'inégalité s'atteint. (ex.)

Fin

Pour les détails complets :

https://christian-chavez.github.io/2025/10/29/interleaving-distance-between-interval-modules.html